MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
FAZEKAS FERENC

C. I.
OPERÁTORSZÁMÍTÁS. SPECIÁLIS FÜGGVÉNYEK

ÍRTA:
FAZEKAS FERENC
DR. FREY TAMÁS

MÁSODIK KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1965

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS

★

BELSŐ MUNKATÁRSAK:
DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

SZEMLÉLTETÉS:
GYURCSY ENDRE
OKL. VILLAMOSMÉRNÖK

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
H 011 284

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1965

A

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SOROZAT KÖTETEI

A.

A. I. Középiskolai matematika (Negyedik kiadás)
A. II. Egyváltozós elemi függvények (Második kiadás)
A. III. Differenciálszámítás (Második kiadás)
A. IV. Határozatlan integrál (Harmadik kiadás)
A. V.* Határozott integrál (Első rész) (Második kiadás)
A. V.** Határozott integrál (Második rész)
A. VI. Többváltozós függvények és differenciálásuk (Második kiadás)
A. VII. Többváltozós függvények integrálása (Második kiadás)
A. VIII. Taylor-sorok (Harmadik kiadás)
A. IX. Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek (Harmadik kiadás)
A. X.* A logarléc (Negyedik kiadás)

B.

B. I—II—III. Vektoranalízis (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája. Skalár-, vektor- és tenzormezők) (Harmadik kiadás)
B. IV. Komplex függvénytan (Harmadik kiadás)
B. V. Numerikus és grafikus közelítő módszerek (Második kiadás)
B. VI. Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok
B. VII.* Közönséges differenciálegyenletek (Első rész) (Harmadik kiadás)
B. VII.** Közönséges differenciálegyenletek (Második rész)
B. VIII. Parciális differenciálegyenletek

C.

C. I. Operátorszámítás. Speciális függvények (Második kiadás)
C. II. Variációszámítás
C. III. Integrálegyenletek
C. IV.* Matrixszámítás (Harmadik kiadás)
C. IV.** Matematikai programozás (Második kiadás)
C. V. Valószínűségszámítás (Második kiadás)
C. VI. Matematikai összefoglaló (Harmadik kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk.)

C. I.

OPERÁTORSZÁMÍTÁS SPECIÁLIS FÜGGVÉNYEK

ÍRTA:

FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS

DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

Második kiadás

A KÖTET KÉZIRATÁT ÁTNÉZTE:

Dr. Grega Béla
egyetemi adjunktus

Dr. Halász Ottó
egyetemi docens
kandidátus

Dr. Bognár János
kandidátus

© FAZEKAS FERENC, DR. FREY TAMÁS, 1965

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő műszaki, alkalmazott anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

Munkánk A. és *B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben, a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzoraink helyeslésével találkoztak, továbbá egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült e rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

Az *A. rész füzeteiben*, professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

---

* A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon!

A *B.* és *C. rész füzeteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatárak legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökéletesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt,* megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ezúton is az olvasóktól, hogy e sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból,* sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert igérő — eredetiségre. Természetesen szépszámú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. vill. m. kolléga érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyvosztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről,* mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak,* különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek,* amely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének és hallgatóinak ajánljuk.* Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve — az eredeti terv szerint sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi nemzetközi mérnöki matematikai kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének — a megalkotásánál semmivel sem könnyebb — munkája vár ránk. Természetesen az első kiadás munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom tanulmányozása, továbbá a könyveinkről kapott hazai és külföldi észrevételek jelentős segítségünkre lesznek. Remélhetőleg módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplináját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a magyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink, valamint a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* továbbá szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nemkülönben az *Egyetemi Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT HARMADIK KIADÁSÁHOZ

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása, a második kiadás lendületes folytatása mellett. A harmadik kiadás egyrészt olyan hagyományos, de széles körben érdekes tárgyú kötetekkel kezdődött meg, mint az A. I. és A. X., másrészt olyan modern alkalmazási területű és e miatt mindinkább keresetté vált kötetekkel, mint az A. IX., B. I—II—III., B. IV. és B. VII.

Az említett második kiadások igen gyors elfogyása — éppen a matematikai programozás lineáris algebrai segédeszközeivel, ill. a síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszerével kapcsolatos bővítés után — kézzel foghatóan bizonyítja a sorozat második kiadásának előszavában kitűzött fejlesztési tervek és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítések helyességét.

E körülmény buzdítás munkaközösségünk részére és megnyugtatás a kiadó számára is, látván, hogy újabb áldozatai hasznos célt és reális igényeket szolgálnak.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958 óta több újabb külországban (pl. a Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban USA-ban, Angliában, NSZK-ban) és nemzetközi fórumon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, ismét kérve ehhez a minisztérium, a kiadó és nem utolsósorban műszaki olvasótáborunk buzdító, áldozatkész támogatását.

Budapest, 1964. február 15.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A KÖTET ELSŐ KIADÁSÁHOZ

Sorozatunk eme újabb kötetében a címben jelzett tárgykörök válogatott fejezeteit ismertetjük, jórészt a tájékozottabb műszaki olvasók igényeihez igazodva.

Az *A)* részben az operátorszámítás és a LAPLACE-transzformáció főbb fogalmait, tételeit, a lineáris differenciálegyenletek megoldásánál használatos eljárását, végül néhány műszaki, főleg elektrotechnikai alkalmazását adjuk elő. Sajnos, a terjedelem és az idő korlátozottsága miatt itt több érdekes elméleti kérdés (pl. a differenciálegyenletek, a mátrixos-operátoros módszer) és műszaki alkalmazás (pl. rezgéstani, automatikai) tárgyalásáról le kellett mondani.

A *B)* és *C)* részben ún. speciális függvényekkel foglalkozunk. Az adott keretek között természetesen itt sem törekedhetünk teljességre. Megjegyzendő, hogy — didaktikai és kutatási szempontok figyelembevételével — a lineáris differenciálegyenletekkel karakterizálható speciális függvényeket (az 5. és 6. §-ban) indirekt úton — e differenciálegyenletek vizsgálata során — alkalmazásként dolgozzuk fel, a többi speciális függvények közül a gamma-, a bétafüggvényt, az elliptikus függvényeket és integrálokat pedig a 3. és 4. §-ban tárgyaljuk.

Megjegyzendő, hogy az említett három rész mindegyike önálló, zárt egységet képez, s így külön-külön is olvasható.

Az előadottak során ismertnek tételeztük fel sorozatunk A. V**, B. IV. kötetének egyes fejezeteit.

A kötet forrásai közül kiemeljük WAGNER, ЛАВРЕНТЬЕВ — ШАБАТ, KONTOROVICS, WHITTAKER—WATSON, HURWITZ—COURANT idézett műveit.

Köszönetet mondunk bírálóinknak számos értékes észrevételükért, valamint GYURCSY mérnöknek az ábrák gondos elkészítéséért.

Végül hálásan emlékezünk meg a MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTÉRIUM és a TANKÖNYVKIADÓ VÁLLALAT áldozatkészségéről és nem utolsó sorban az EGYETEMI NYOMDA igényes munkájáról.

Budapest, 1957. március 15.

ELŐSZÓ A KÖTET MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

A jelen kiadás — néhány apróbb helyreigazítástól eltekintve — megegyezik az előzővel. Sajnálattal tesszük e közlést; ugyanis terveztünk bizonyos, korszerűsítő jellegű kiegészítést (pl. Mikusinszki módszeréről, tartószerkezeti alkalmazásokról stb.), sőt ezt az egyetem részéről is helyeselték, azonban tervezési nehézségek miatt e kiadásban nem sikerült megvalósítani. Reméljük, a legközelebbi kiadásban mindezt bőven pótolhatjuk. Ezt annál is inkább kötelességünknek érezzük, mert könyvünket a külföldi szakirodalomban is idézik.

Felhívjuk még az Olvasó figyelmét néhány, részben vagy egészben idevágó új magyar munkára pl. *Fodor* [21], *Farkas* [22] és *Bajcsay — Fazekas* [23] könyvére.

Kívánjuk, hogy könyvünk második kiadása a mérnökök újabb százait, ezreit győzze meg a két tárgyalt diszciplína fontosságáról!

Budapest, 1965. március 15.

A Szerzők

E KÖTET

TARTALOMJEGYZÉKE

A) rész (Írta: Fazekas Ferenc)

1. §. OPERÁTORSZÁMÍTÁS ÉS LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ 15

a) A HEAVISIDE-féle operátorszámításról 15

α) Differenciál- és integrál-operátorok 15
β) Differenciálegyenlet megoldása operátorszámítással 16
γ) HEAVISIDE módszereinek nehézségei 17

b) Az operátorszámítás függvénytranszformációs megalapozása ... 17

α) Átmenet a függvénytranszformációra 17
β) A WAGNER—BROMVICH-féle megalapozás 18
γ) A CARSON-, DOETSCH-, V. D. POL-féle megalapozás 19

c) A LAPLACE-transzformáció és inverziója 20

α) Adott eredeti függvény $\mathfrak{L}$-transzformálása 20
β) Adott $\mathfrak{L}$-transzformált függvény inverz-transzformálása 23
γ) Az új operátorszámítási eljárásról 29

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

d) A LAPLACE-transzformációs számítás főbb szabályai 31

α) Linearitás. Hasonlósági tétel 31
I°. Linearitás 31
II°. Hasonlósági tétel 31

β) Differenciálás, integrálás t és p szerint 32

I°. A t szerinti derivált transzformálása 32
II°. A t szerinti integrál transzformálása 33
III°. A transzformált p szerinti differenciálása 33
IV°. A transzformált p szerinti integrálása 34

γ) Eltolás a t tengelyen és a p síkon 35
I°. Eltolás a t tengelyen 35
II°. Eltolás a p síkon 35

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

δ) Eredeti, illetve transzformált függvények szorzása 45
I°. Transzformált függvények szorzása 45
II°. Eredeti függvények szorzása 47

ε) Az első és második kifejtési tétel 48
I°. Az első kifejtési tétel 48
II°. A második kifejtési tétel 49
III°. A második kifejtési tétel általánosításai 51

ζ) Különleges függvények transzformálása 52
I°. Tört kitevőjű hatványok transzformálása 52
II°. Impulzusfüggvények transzformálása 53
III°. Az $\int_{\tau}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau$ függvény transzformálása 56
IV°. Tört kitevőjű hatványsor transzformálása 56

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

e) Az operátorszámítás alkalmazása lineáris differenciálegyenletek megoldására 69
α) Közönséges, lineáris, állandó együtthatójú differenciálegyenletek 69
β) Közönséges, lineáris, állandó együtthatójú differenciálegyenlet-rendszerek 70
γ) Közönséges, lineáris, változó együtthatójú differenciálegyenletek 70

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

δ) Parciális, lineáris, változó együtthatójú differenciálegyenletek 76

PÉLDÁK

f) Az operátorszámítás néhány műszaki alkalmazása 81
α) Tranziens jelenségek elektromos áramkörökben 81

PÉLDÁK

β) Tranziens jelenségek elektromos távvezetékekben 92

PÉLDÁK

B) rész (Írta: dr. Frey Tamás)

2. §. NÉHÁNY FONTOS FÜGGVÉNYTANI FOGALOMRÓL 103

a) Függvények analitikus folytatása 103
α) Néhány elnevezés 103
β) Az analitikus folytatásról 103
γ) A permanenciatétel 105

b) Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok 105

c) Meromorf függvények és részlettört-előállításuk 106
α) Meromorf függvények 106
β) A MITTAG—LEFFLER-féle részlettört-előállítás 106

d) Egész függvények és szorzat-előállításuk 108
α) Egész függvények 108
β) A WEIERSTRASS-féle szorzat-előállítás 108

e) Függvények aszimptotikus vizsgálata 109
α) Aszimptotikus sorok 109
β) Az EULER-féle összegképlet 111
γ) Nyeregpont-módszer 112

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

3. §. A GAMMA- ÉS A BÉTAFÜGGVÉNY 151

a) A gammafüggvényről 151
α) Származtatása 151
β) Legfontosabb előállításai 152
γ) További előállítások 153
δ) Fontosabb összefüggések 153
ε) Számítástechnika. Aszimptotikus kifejezések 153
ζ) Alkalmazások 154

b) A bétafüggvényről 155
α) Definíciója 155
β) Előállításai 155
γ) Összefüggése a gammafüggvénnyel 155
δ) Alkalmazások 155

c) Vegyes gyakorló feladatok 156
PÉLDÁK ÉS FELADATOK

4. §. ELLIPTIKUS FÜGGVÉNYEK ÉS INTEGRÁLOK 183

a) A kettős periódusú meromorf függvényekről 183
α) Meromorf függvények periódusairól 183
β) Egyszeresen periodikus függvények és FOURIER-soruk 184
γ) Az elliptikus függvények alaptulajdonságai 184

b) Az elliptikus függvények WEIERSTRASS-féle rendszerezése 185

α) A $\wp$-függvény 185
β) Jellemző függvényegyenletek 187
γ) A ζ- és a σ-függvények vizsgálata 188
δ) Elliptikus függvények előállítása a $\wp$-, a ζ-, illetve a σ-függvény segítségével 189
ε) A thétafüggvények 190

c) Az elliptikus függvények JACOBI-féle elmélete 191

α) Az alapfüggvények definíciója 192
β) A JACOBI-féle elliptikus függvények tulajdonságai 192
γ) A JACOBI és trigonometrikus függvények kapcsolata 193
ω) Vegyes feladatok 193

d) Az elliptikus integrálokról 193
α) Ciklikus primitív függvények és periodikus inverzeik 193
β) Elliptikus integrálok és normálalakjaik 194
γ) További kapcsolatok az elliptikus integrálok és függvények között ... 198
δ) A LANDEN-féle transzformáció 198

e) Alkalmazások 198
α) Geometriai alkalmazások 198
β) Elektrosztatikai és hidrodinamikai alkalmazások 199
γ) Mechanikai alkalmazások 199
δ) Műszaki alkalmazások 199
PÉLDÁK ÉS FELADATOK

C) rész (Írta: dr. Frey Tamás)

5. §. A KOMPLEX SÍKON ÉRTELMEZETT LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK 235

a) A lineáris differenciálegyenletekről általában 235
α) Egzisztenciatételek. Hatványsor alakú megoldások 235
β) A megoldásrendszerek általános tulajdonságai 236
γ) A megoldások analitikus folytatása és a lineáris függetlenség 236
δ) Izolált szinguláris pontok vizsgálata 236

b) A másodrendű homogén egyenletek esete 236
α) A megoldásrendszer szingularitásának típusai 237
β) A praktikus megoldás nem-lényegesen szinguláris pontban 238
γ) FUCHS-típusú differenciálegyenletek 239
δ) A REIMANN-féle P-függvény 240
ε) Lényegesen szinguláris pontok 241
ζ) Periodikus, illetve kettős periódusú együtthatók esetének vizsgálata 242

c) **Vonalintegrál alakú megoldások meghatározása** 242

α) Az általánosított LAPLACE-transzformáció 242
β) A JORDAN-féle megoldás 242

d) **Kvalitatív vizsgálatok** 242

α) A jellemző függvényegyenletek 243
β) Generátorfüggvények 243

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

6. §. A ZÉRUSHELYEK ELOSZLÁSA. A SAJÁTFÜGGVÉNYEK ORTOGONALITÁSA 272

a) A lineáris differenciálegyenletek megoldásának zérushelyeiről 272

α) Zérushelyek a valós tengelyen 272
β) Zérushelyek a komplex síkon 273

b) A sajátfüggvények ortogonalitása és a FOURIER-sorfejtés 275

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

EREDMÉNYTÁR

FELHASZNÁLT ÉS AJÁNLOTT IRODALOM

A) rész

OPERÁTORSZÁMÍTÁS

ÍRTA:
FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS

1. §. OPERÁTORSZÁMÍTÁS ÉS LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ

a) A HEAVISIDE-féle operátorszámításról

α) Differenciál- és integráloperátorok

Az operátorszámítás megalapítójának O. HEAVISIDE-ot a neves angol elektromérnököt (1850—1925) tekinthetjük. Differenciáloperátorokat ugyan már előtte is alkalmaztak egyes matematikusok, pl. LEIBNIZ, LAGRANGE, CAUCHY, azonban az operátorszámítás technikájának kidolgozása, mesteri kezelése, széles körű műszaki alkalmazása s ezen keresztül a mérnöki érdeklődés felkeltése kétségtelenül HEAVISIDE érdeme.

Vázoljuk röviden HEAVISIDE módszerének alapvonásait. Bevezette a

$$\frac{d}{dt}(x(t)) = p \cdot x(t), \quad \frac{d^2}{dt^2} x(t) = p^2 \cdot x(t), \ldots \tag{1}$$

differenciáloperátoros és — közelfekvően — az

$$\int_0^t x(\tau)\, d\tau = \frac{1}{p} \cdot x(t), \quad \int_0^t d\tau \int_0^\tau x(\tau_1)\, d\tau_1 = \frac{1}{p^2}\ x(t), \ldots \tag{2a}$$

integráloperátoros szimbolikát. Az utóbbi, speciálisan az

$$1(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad t > 0 \\ 0, & \text{ha} \quad t < 0 \end{cases}$$

függvényre (egységugrás) alkalmazva, $t > 0$-nál

$$\int_0^t 1 \cdot d\tau = t = \frac{1}{p} \cdot 1, \quad \int_0^t \tau\, d\tau = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{p^2} \cdot 1, \ldots \tag{2b}$$

alakot ölt. Továbbá — az (1) és (2b) értelmében $t > 0$-nál —

$$1 = \frac{d}{dt} t = p \cdot t = p \cdot \frac{1}{p} \cdot 1 = p^0 \cdot 1 = 1. \tag{2c}$$

Ezen operátorszimbolikával dolgozva, pl. az

$$a_n x^{(n)} + \ldots + a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = t \tag{3a}$$

n-ed rendű lineáris állandó együtthatójú inhomogén differenciálegyenlet

$$(a_n p^n + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) \cdot x = \frac{1}{p} \tag{3b}$$

módon alakul.

β) Differenciálegyenlet megoldása operátorszámítással

Részletezzük most a HEAVISIDE-féle operátorszámítás alkalmazását az

$$U + \alpha U = \alpha E_0 \cdot 1(t) \quad \left(\alpha = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}\right) \tag{4a}$$

elsőrendű lineáris állandó együtthatójú inhomogén differenciálegyenlet teljes megoldására. A (4a) az R ohmos ellenállást és C kapacitást sorba kapcsolva tartalmazó áramkör U kondenzátorfeszültségére vonatkozik az E_0 állandó elektromotoros erő bekapcsolása után.* A (4a) operátoros alakja

$$(p + \alpha)\, U = \alpha E_0 \cdot 1 \tag{4b}$$

Ezt mint algebrai egyenletet az ismeretlen U-ra megoldva, majd a neki megfelelő p-s kifejezést formálisan sorba fejtve, az

$$U = \alpha E_0 \cdot \frac{1}{p+\alpha} \cdot 1 = \frac{\alpha E_0}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{\alpha}{p}} \cdot 1 =$$

$$= \frac{\alpha E_0}{p}\left(1 - \frac{\alpha}{p} + \frac{\alpha^2}{p^2} - \frac{\alpha^3}{p^3} + - \ldots\right) \cdot 1 = E_0\left(\frac{\alpha}{p} - \frac{\alpha^2}{p^2} + \frac{\alpha^3}{p^3} - \frac{\alpha^4}{p^4} + - \ldots\right) \cdot 1 \tag{4c}$$

kifejezés adódik. Végül — a (2b) figyelembevételével — a t változóra visszatérve,

$$U = E_0\left(\alpha t - \frac{\alpha^2 t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} - \frac{\alpha^4 t^4}{4!} + - \ldots\right) \cdot 1(t) = E_0(1 - e^{-\alpha t}) \cdot 1(t) \tag{4d}$$

alakban nyerjük a (4a) differenciálegyenlet megoldását. A (4b) és (4d) összevetéséből az is kitűnik, hogy

$$1 - e^{-\alpha t} = \frac{\alpha}{p+\alpha} \cdot 1, \qquad e^{-\alpha t} = \frac{p}{p+\alpha} \cdot 1, \qquad e^{\alpha t} = \frac{p}{p-\alpha} \cdot 1,$$

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t = \frac{p}{p - i\omega} \cdot 1. \tag{4e}$$

Meglepő, hogy a (4c) helyett az

$$U = \alpha E_0 \cdot \frac{1}{p+\alpha} \cdot 1 = E_0 \cdot \frac{1}{1+\frac{p}{\alpha}} \cdot 1 = E_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{\alpha} + \frac{p^2}{\alpha^2} - \frac{p^3}{\alpha^3} + - \ldots\right) \cdot 1 \tag{4f}$$

sorfejtést alkalmazva, és a $p \cdot 1 = p^2 \cdot 1 = p^3 \cdot 1 = \ldots = 0$ differenciálási eredményeket figyelembe véve, a (4d)-től teljesen eltérő

$$U = E_0 \cdot 1 \cdot 1 = E_0 \cdot 1(t) \tag{4g}$$

megoldáshoz jutunk.

* A továbbiakban többször hivatkozunk az operátorszámítás klasszikus műszaki alkalmazási területére, az elektrotechnika bekapcsolási jelenségeire, az *f)* pontban pedig behatóbban is tárgyaljuk ezeket. Hangsúlyozandó, hogy az operátorszámításnak számos egyéb műszaki alkalmazási területe is van, pl. hőtani, rezgéstani, automatikai stb.; az előbbi kettőt röviden érintjük az *e)* részben, az utóbbi tekintetében viszont a sorozat B. IV. kötetének 3. § *f)* és 4. § *e)* pontjaira utalunk.

γ) Heaviside módszerének nehézségei

A Heaviside-féle operátorszámítás további ismertetésétől eltekintünk, mert egyrészt egyes hiányosságai az előbbiekből is kitűnnek, másrészt több formulájával, tételével a későbbiekben úgyis találkozni fogunk.

Lássuk tehát Heaviside módszerének néhány nehézségét! Összevetve a (4d) eredményt a (4a) differenciálegyenletnek az $U(0) = U_0$ kezdeti feltételt figyelembe vevő, közismert

$$U(t; U_0) = U_0\, e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \alpha\, E_0\, d\tau =$$

$$= U_0\, e^{-\alpha t} + E_0 \left[e^{-\alpha(t-\tau)}\right]_0^t = U_0\, e^{-\alpha t} + E_0(1 - e^{-\alpha t}) \quad (t > 0)$$

megoldó képletével, nyilvánvaló, hogy a (4d) a (4a)-nak az $U(0) = 0$ nullfeltételt kielégítő partikuláris megoldása. Heaviside *módszerének* kellemetlen megkötöttsége tehát, hogy a *bekapcsolási jelenséget csupán a kezdetben energiamentes rendszer* (esetünkben feszültségmentes kondenzátort tartalmazó áramkör) *speciális esetére adja meg.*

Mit mondhatunk a (4g)-ről? Ez is egy partikuláris megoldása a (4a)-nak, mégpedig a $t \to \infty$-nél állandósuló kondenzátorfeszültség.

A Heaviside-féle operátorszámítás egyik fő nehézsége ismerhető fel azon körülményben, hogy *az operátoros kifejezés* [esetünkben az $1/(p + \alpha)$] *különböző átalakításai az adott differenciálegyenlet különböző megoldásaihoz vezethetnek*, és külön vizsgálattal kell megállapítani, hogy ezek közül éppen melyik a kitűzött feladat megoldása.

Végül a módszernek még egy súlyos nehézsége tükröződik az előzőkben. Mint ismeretes, az

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + - \ldots$$

sorfejtés csak az $|z| < 1$ körben konvergens. Esetünkben

$$z = \frac{\alpha}{p} = \alpha : \frac{d}{dt}, \quad \text{illetve} \quad z = \frac{p}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{d}{dt},$$

amelynek abszolút értékéről nem beszélhetünk. Ily módon *a sorfejtés konvergenciájáról semmit sem lehet kijelenteni*, és alkalmasint hamis eredményhez is juthatunk.

A felsorolt néhány nehézségből is megérthető, hogy *a Heaviside-féle operátorszámítás komoly matematikai megalapozásra szorult*, amely hivatva volt magától megszüntetni a zavaró határozatlanságokat és helyt adni az eljárás kiterjesztésének tetszőleges kezdeti feltételek (esetünkben feltöltött kondenzátor) esetére.

b) Az operátorszámítás függvénytranszformációs megalapozása

α) Átmenet a függvénytranszformációra

Visszatekintve az *a)*-ban elmondottakra, megállapítható, hogy a Heaviside-féle operátorszámítás lineáris inhomogén differenciálegyenletekre (műszakilag: lineáris átviteli rendszerek bekapcsolási jelenségeire) való alkalmazása az

$$f(t) = \varphi(p) \cdot 1(t) \tag{1a}$$

egyenlet vagy ebből a Duhamel-integrál* segítségével nyerhető általánosabb

$$k(t) = \varphi(p) \cdot b(t) \tag{1b}$$

* L. a *d) δ)* I° helyen!

egyenlet felállítását és megoldását jelenti. Itt $1(t)$ és $b(t)$ a külső behatásnak, $f(t)$ és $k(t)$ az általuk létrehozott hatásnak időbeli lefolyása, $\varphi(p)$ pedig — a HEAVISIDE-nél végső soron differenciálási és integrálási utasításokat képviselő — *operátorfüggvény*. Az *a) β)*-ban vizsgált esetben pl.

$$k(t) = U(t), \quad b(t) = E_0 \cdot 1(t); \quad f(t) = \frac{U(t)}{E_0} = 1 - e^{-\alpha t}, \quad \varphi(p) = \frac{\alpha}{p + \alpha}, \tag{1c}$$

volt.

Figyelemre méltó, hogy *az* (1a, b)*-ben említett* $\varphi(p)$ *operátorfüggvény azonos a harmonikusan gerjesztett rendszer állandósult (üzemi) állapotára érvényes* $y(p)$ *átviteli függvénnyel*, feltéve, hogy $p \equiv i\omega$, ahol ω a harmonikus rezgés körfrekvenciája. Az *a) β)*-beli esetben pl. — az $\mathfrak{E} = E e^{pt}$, $\mathfrak{U} = U e^{pt}$ (E és U általában komplex, $p \equiv \equiv i\omega$) helyettesítéssel —

$$(p + \alpha)\, U e^{pt} = \alpha E e^{pt}, \qquad U = \frac{\alpha}{p + \alpha} E \tag{2a}$$

alakra jutunk, és nyilvánvaló, hogy

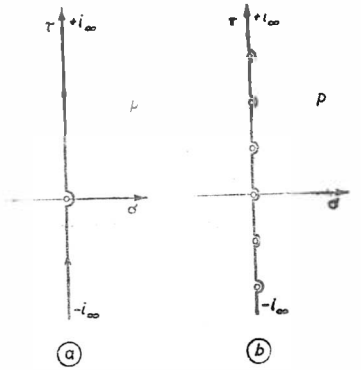
$$\frac{U}{E} = y(p) = \frac{\alpha}{p + \alpha} = \varphi(p) = \frac{f(t)}{1(t)}. \tag{2b}$$

Visszatérve az (1a) egyenletre, ennek alapján *az operátorszámítás lényege* a (lineáris differenciálegyenlet és null-feltételek által) megadott $\varphi(p)$ operátorfüggvényből az ismeretlen $f(t)$ időfüggvény meghatározása, vagyis *a* $\varphi(p) \to f(t)$ *függvénytranszformáció* végrehajtása.

Ilyen irányban keresték a kutatók a — HEAVISIDE által e lényeg kellő méltatása nélkül, jórészt csak mechanikusan használt s egyébként a $p = d/dt$ operátorra alapozott, csak nullfeltételek mellett érvényes, különböző átalakításoknál alkalmasint zavarokra vezető — operátorszámítás matematikai megalapozását.

β) A WAGNER—BROMWICH-féle megalapozás

Az operátorszámítás függvénytranszformációs megalapozása irányában az olasz G. GIORGI tette meg az első kísérletet. 1904—05-ben közölt értékes munkáiban rámutatott az operátorszámítás és a FOURIER-féle integrálelőállítás összefüggésére. Sajnos, a HEAVISIDE-féle $p = d/dt$ operátorfogalomra támaszkodott, s így szigorú megalapozásra nem is juthatott.



1. ábra

1916-ban az operátorszámítás érdekes, műszaki matematikai meggondolásokon nyugvó megalapozását adta a német K. W. WAGNER. Ő az egységugrásnak FOURIER-féle

$$1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{p}\, dp \qquad (p \equiv i\omega) \tag{3}$$

előállításából indult ki, amely folytonos spektrumú, dp körfrekvenciaközökön $dp/2\pi i\, p$ amplitudójú és e^{pt} időtényezőjű harmonikus rezgések eredőjeként adja az egységugrást; az integrálásnál egy kis félkörrel (jobbra) meg kell kerülni a $p = 0$ szinguláris pontot (1*a*. ábra).

Az $1(t)$ elemi részét képező $e^{pt}\,dp/2\pi i p$ harmonikus rezgést — az α)-ban tanultak szerint — a lineáris rendszerbeli bekapcsolási jelenség [$\varphi(p)$ operátorfüggvényéből $p = i\omega$ módon nyerhető] átviteli függvényével szorozva, megkapjuk az (t) megfelelő elemi részét, azaz $df = \varphi(p)\, e^{pt}\, dp/2\pi i p$. Ez utóbbiak eredőjeként adódik *a lineáris rendszerbeli bekapcsolási jelenség $f(t)$ időfüggvényének integrálelőállítása* és egyszersmind az (1a)-val kifejezett feladat megoldása, azaz

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{pt} \frac{\varphi(p)}{p}\, dp \qquad (p \equiv i\omega), \tag{4}$$

ahol az integrálásnál a $p = 0$ mellett a $\varphi(p)$ esetleges zérushelyei is (jobbra) megkerülendők (1*b*. ábra). Megjegyzendő, hogy a (4) levezetésénél a HEAVISIDE-féle $p = d/dt$ operátorforgalom nem nyert felhasználást! Egyébként a $\varphi(p)$ a (4)-ben az $f(t)$ frekvenciaspektrumának (pontosabban amplitudósűrűségének) p-szeresét jelenti, a konstans faktortól eltekintve.

Más megfontolásokkal a (4)-hoz hasonló megoldásra jutott 1916-ban az angol T. J. I. BROMWICH.

Figyelemre méltó, hogy a WAGNER—BROMWICH-féle (4) integrál hallgatólagosan a LAPLACE-transzformációra utal. Ui. a FOURIER-integrál ismert

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Phi(p)\, e^{pt}\, dp, \qquad \Phi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt \tag{5a}$$

általános formuláiban $\Phi(p)$ helyett $\varphi(p)/p$-t írva $(p \equiv i\omega)$, az

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\varphi(p)}{p}\, e^{pt}\, dp, \qquad \frac{\varphi(p)}{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt \tag{5b}$$

formulákat kapjuk; ezek közül az első a (4)-gyel azonos, a második, ún. kétoldalú LAPLACE-integrál a (4) inverz-transzformációs formulája.

Gyakorlatban *a bekapcsolás pillanata* $(t = 0)$ *előtt* $f(t) = 0$, tehát az (5b) második integrálja 0 alsó határral, azaz ún. egyoldalú LAPLACE-integrál

$$\frac{\varphi(p)}{p} = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt \tag{6}$$

alakjában írható, az első viszont változatlan marad.

γ) A CARSON-, DOETSCH-, V. D. POL-féle megalapozás

Elsőnek az angol J. R. CARSON figyelte meg 1922-ben, lineáris rendszerek vizsgálata során, hogy a bekapcsolási jelenség (ismert) HEAVISIDE-féle $\varphi(p)$ operátorfüggvénye és (ismeretlen) $f(t)$ időfüggvénye között mindig a (6) integrálegyenlet áll fenn. E felismeréssel lehetővé vált az operátorszámítás szigorú matematikai megalapozása a LAPLACE-féle függvénytranszformáció által. Ehhez még szükség volt a HEAVISIDE-féle formális operátorfogalom teljes kiküszöbölésére.

E lépést a német G. DOETSCH tette meg először, 1924-ben, majd 1937-ben alapvető műben tisztázta a LAPLACE-transzformáció elméletét és alkalmazását.

Ugyancsak a (6) LAPLACE-integrálra alapozta az operátorszámítást V. D. POL 1929-ben, és ilyen alapon vezette le HEAVISIDE átalakítási szabályait és kifejtési tételeit, a $p = d/dt$ operátor mellőzésével. Sőt még az „operátorszámítás" elnevezést is helytelenítette s helyette a „szimbolikus számítás"-t javasolta. (Könyvünkben — a szokásnak hódolva — mégis az előbbit fogjuk használni!)

Megjegyzendő, hogy maga P. S. LAPLACE (1749—1827) valószínűségi vizsgálatai során használta a később róla elnevezett és nevének kezdőbetűjével jelzett

$$\mathfrak{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt \tag{7}$$

függvénytranszformációt.

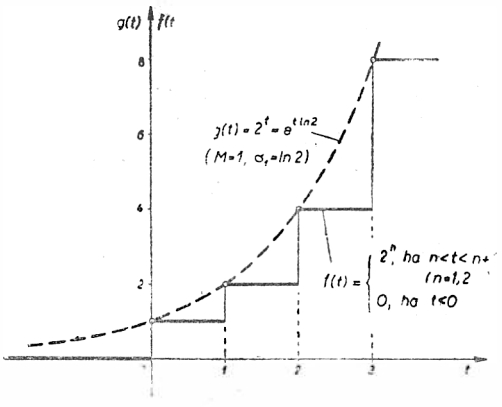
Érdekes, hogy a LAPLACE-transzformációt HEAVISIDE is ismerte, sőt használta anélkül, hogy az operátorszámítás matematikai megalapozására való alkalmasságát felismerte volna.

A továbbiakban a modern, LAPLACE-transzformációra alapozott operátorszámítást s ennek néhány műszaki alkalmazását ismertetjük.

c) A LAPLACE-transzformáció és inverziója

α) Adott eredeti függvény $\mathfrak{L}$-transzformálása

I°. *Eredeti* (transzformálandó) *függvény* lehet minden olyan valós változós komplex vagy valós $f(t)$ függvény, amely *eleget tesz az alábbi feltételeknek:* 1'. Deriváltjával együtt folytonos az egész t tengely mentén, kivéve olyan osztópontokat, amelyekben $f(t)$ és $f'(t)$ elsőfajú (véges) szakadást szenved; ilyen pont a t tengely bármely véges szakaszán csak véges számban fordulhat elő.



2. ábra

2'. Minden negatív t-re zérus értékű, azaz

$$f(t) = 0, \quad \text{ha} \quad t < 0. \tag{1a}$$

3'. Növekedése nem gyorsabb az exponenciális függvényénél, azaz találhatók olyan $\sigma_1 \geqq 0$, $M = M(\sigma_1) > 0$ állandók, hogy minden t-re

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma_1 t}, \tag{1b}$$

ahol σ_1 az ún. *emelkedési kitevő;* korlátos $f(t)$-nél nyilván $\sigma_1 = 0$.

Az eredeti függvényre példaként l. a 2. ábrát.

A műszaki alkalmazások szempontjából nézve az 1' és 3' feltétel a műszaki folyamatokat leíró $f(t)$ függvények többségénél teljesül; a 2' feltételt úgy teljesítjük, hogy a vizsgálandó bekapcsolási jelenségeknél a bekapcsolás pillanatát $t = 0$-nak, az állapothatározó bekapcsolás előtti ($t < 0$), nyugalmi értékét $f(t) = 0$-nak választjuk.

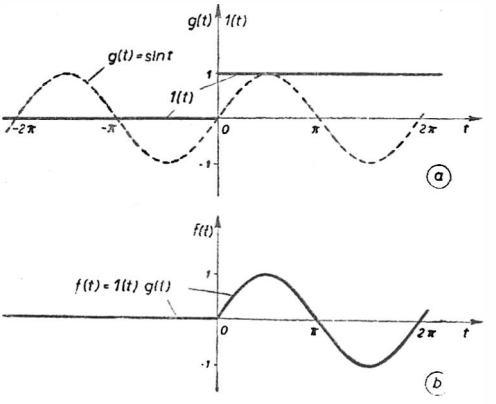
A 2′ feltételt nem teljesítő $g(t)$ függvényből az

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ 1, & \text{ha } t > 0 \end{cases} \qquad (2)$$

*egységugrás*sal való szorzással készítünk a 2′-nek megfelelőt, lévén (3. ábra):

$$f(t) = 1(t)\, g(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ g(t), & \text{ha } t < 0. \end{cases} \qquad (3)$$

ilyenek pl. $1(t) \sin \omega t$, $1(t)\, t^n$, $1(t)\, e^{\lambda t}$. Az egyszerűbb írásmód kedvéért az $1(t)$ tényezőt rendszerint mellőzzük, pl. $1(t) \sin \omega t$ helyett $\sin \omega t$-t írunk.



3. ábra

II°. *Az $f(t)$ eredeti függvény* LAPLACE *szerinti transzformált függvényét*

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt \qquad (p = \sigma + i\tau) \qquad (4)$$

módon értelmezzük és jelöljük. A jobb oldali, ún. LAPLACE-integrál láthatóan p (komplex) paraméteres, improprius integrál.*

Korábban már utaltunk arra, hogy az $f(t)$ eredeti függvénynek megfelelő HEAVISIDE-féle $\varphi(p)$ operátorfüggvény közvetlenül a CARSON által felismert

$$\mathcal{C}[f(t)] = \varphi(p) = p \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt \qquad (5)$$

transzformációval nyerhető, ahol azonban p az eredeti $p = d/dt$ operátor helyett $p = \sigma + i\tau$ komplex paraméternek tekintendő.

A (4) és (5) összevetéséből nyilvánvaló, hogy *az $f(t)$ eredeti függvény $\varphi(p)$* CARSON*-transzformáltja és $F(p)$* LAPLACE*-transzformáltja között a*

$$\frac{\mathcal{C}[f(t)]}{p} = \frac{\varphi(p)}{p} = F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \qquad (6)$$

egyszerű összefüggés áll fenn; ennélfogva bármikor könnyen áttérhetünk az egyik szimbolikáról a másikra.

Minthogy a CARSON-féle operátorszámítás immár szilárd matematikai alappal rendelkezik, nincs akadálya annak, hogy nyilvánvaló előnyeit, pl. a

$$p = \sigma + i\tau \rightleftarrows p = d/dt; \qquad \mathcal{C}[1(t) = 1, \qquad \mathcal{C}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{p}; \qquad \varphi(i\omega) = y(i\omega)$$

* Az ilyen integrálokról l. pl. sorozatunk A. V.** kötetét.

tényeket kihasználjuk. Gyakran élni is fogunk a továbbiakban e lehetőséggel! Ennek megkönnyítésére a fontosabb formulákat a LAPLACE-féle mellett a CARSON-féle szimbolikával is felírjuk.

III°. Az $F(p) = \varphi(p)/p$ transzformált függvény a $p = \sigma + i\tau$ komplex változónak csak azon értékeire van meghatározva, amelyekre a (4) jobb oldalán álló LAPLACE-integrál konvergál. E tekintetben a $\sigma = \mathrm{Re}\, p$ valós rész [geometriailag a p sík képzetes (τ) tengelyével párhuzamos és a $p = \sigma + i\tau$ ponton átmenő egyenes σ abszcisszája] mértékadó. Igazolható a következő

Tétel. Ha a LAPLACE-*integrál konvergál valamely* $\mathrm{Re}\, p = \sigma_k$ *egyenes mentén, akkor ugyancsak konvergál a (tőle jobbra fekvő)*

$$\mathrm{Re}\, p > \sigma_k \tag{7a}$$

félsíkon is. A $\min \sigma_k = \sigma_0$ *értéket, amelynél integrálunk még konvergál, vagy már éppen nem konvergál, a* LAPLACE-*integrál konvergencia-abszcisszájának, a*

$$\mathrm{Re}\, p > \sigma_0 \tag{7b}$$

félsíkot pedig konvergencia-félsíkjának nevezzük.

A $0 < t < \infty$ szakaszon előjelet váltó $f(t)$ függvény esetén szükséges ismerni a LAPLACE-integrál abszolút konvergencia-tartományát, ahol ti. az

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} |f(t)|\, dt \tag{8}$$

integrál véges. Igazolható a következő

Tétel. *A* LAPLACE-*integrálnak van valamely* σ_{0a} *abszolút konvergencia-abszcisszája és megfelelő*

$$\mathrm{Re}\, p > \sigma_{0a} \tag{9a}$$

abszolút konvergencia-félsíkja.

Megjegyzendő, hogy σ_1 emelkedési kitevő $\sigma_1 \geqq \sigma_{0a}$ tulajdonságú. Ui. az (1b) alatti $|f(t)| \leqq M e^{\sigma_1 t}$ egyenlőtlenség alapján, $\mathrm{Re}\, p = \sigma > \sigma_1$ esetén a (8) integrál

$$\int_0^\infty |f(t)|\, e^{-\sigma t} \leqq M \int_0^\infty e^{-(\sigma-\sigma_1)t}\, dt = \frac{M}{\sigma - \sigma_1} \tag{9b}$$

módon, vagyis konvergens integrállal majorálható, tehát a LAPLACE-integrál a $\mathrm{Re}\, p > \sigma_1$ félsíkon valóban abszolút konvergens, és vele $F(p)$ ott meghatározott.

Könnyen belátható továbbá, hogy

$$\sigma_0 \leqq \sigma_{0a}. \tag{9c}$$

Speciálisan, $\sigma_0 = -\infty$ esetén a LAPLACE-integrál mindenütt, $\sigma_0 = +\infty$ esetén pedig sehol sem konvergens. *A* $\sigma_0 < +\infty$ *esetben az* $f(t)$ *függvényt transzformálhatónak nevezzük.*

Abszolút jelzővel ugyanazeket mondhatjuk a $\sigma_{0a} = -\infty$, $\sigma_{0a} = +\infty$, $\sigma_{0a} < +\infty$ esetekről. Ilyen értelemben az I° 1′, 2′ és 3′ sajátságú függvények mind abszolút transzformálhatók.

IV°. Az $F(p) = \varphi(p)/p$ regularitásával foglalkozik a következő

Tétel. *A* LAPLACE*-integrál* $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ *konvergencia-félsíkján az* $F(p)$ *reguláris függvény (tehát ott* p *szerint akárhányszor differenciálható).*

Az $F(p)$ szinguláris pontjai ily módon a jobbról zárt $\operatorname{Re} p \leqq \sigma_0$ divergencia-félsíkon helyezkednek el.

A tételt itt csupán a $\operatorname{Re} p > \sigma_1$ félsíkra igazoljuk. Integrálunk a p szerinti differenciálás után is egyenletesen konvergens marad bármely $\operatorname{Re} p \geqq a > \sigma_1$ félsíkon, mert az integrálandó abszolút értéke ott

$$|f(t)\, t\, e^{-pt}| \leqq M\, t\, e^{-(a-\sigma_1)t}$$

módon, vagyis p-től függő és (az

$$M \int_0^\infty t\, e^{-(a-\sigma_1)t}\, dt = \frac{M}{(a-\sigma_1)^2}$$

eredmény értelmében) integrálható függvénnyel majorálható. Következésképpen — a komplex függvénytannak a $G(z) = (C)\int g(z, \zeta)\, d\zeta$ alakú paraméteres integrálok regularitására vonatkozó tétele* szerint — az $F(p)$ függvény a $\operatorname{Re} p > \sigma_1$ félsík pontjaiban deriválttal rendelkezik, vagyis ott reguláris, q. e. d.

A LAPLACE integrál a $\operatorname{Re} p < \sigma_0$ bal félsíkon divergens ugyan, de ez nem jelenti azt, hogy ott az $F(p) = \varphi(p)/p$-nek a jobb félsíkra nyert kifejezése értelmét veszti. Ellenkezőleg: *az* $F(p)$ *általában (de nem mindig) analitikusan folytatható a divergencia-félsíkon, a konvergencia-félsíkra nyert kifejezése útján.*

Pl. $f(t) = e^{at}$ esetén $F(p) = 1/(p-a)$, $\operatorname{Re} p > a$; a divergencia-félsík $\operatorname{Re} p < a$, ott azonban $1/(p-a)$ reguláris, a $p = a$ elsőrendű pólus kivételével.

V°. Az $F(p) = \varphi(p)/p$ végtelenbeli magatartására vonatkozik az alábbi

Tétel. *Ha a* p *úgy tart a végtelenhez, hogy közben* $\sigma = \operatorname{Re} p$ *korlátlanul nő, akkor* $F(p)$ *a zérushoz tart, azaz*

$$\lim_{\sigma \to +\infty} F(p) = 0. \tag{10}$$

E tétel a (9b) egyenlőtlenség közvetlen folyománya.

Tételünkből következik, hogy $F(p) \to 0$, ha $p \to \infty$, közben az $|\arc p| < \pi/2 - \delta$ szektor belsejében maradva ($\delta > 0$ bármilyen kicsiny); e konvergencia másrészt — az említett szektorban — az arc p-re nézve egyenletes. Ha, speciálisan, $F(p)$ reguláris a $p = \infty$ pontban, akkor bármilyen $p \to \infty$ határátmenetnél is $F(p) \to 0$; ez esetben tehát $p = \infty$ az $F(p)$ zérushelye.

β) Adott $\mathfrak{L}$-transzformált függvény inverz-transzformálása

I°. Most az inverz — transzformációs** formulának egy nem teljes szigorúságú levezetését közöljük, majd (apró betűvel) szigorú bizonyítását is megadjuk.

1'. Vizsgáljuk az

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau - i\infty}^{\tau + i\infty} \frac{e^{pt}}{p}\, dp$$

* L. pl. *Лаврентьев—Шабат* [2] 52. o.

** Az *inverz-transzformáció* helyett — a rövidség kedvéért — gyakran *inverziót* mondunk; ez nem tévesztendő össze a közönséges (pl. $\sin p \to \arcsin p$) értelemben vett inverzióval.

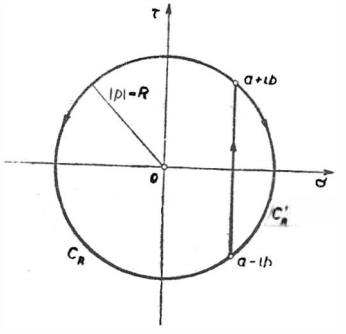
integrált, amely a $\operatorname{Re} p = a > 0$ egyenes mentén, alulról felfelé haladva veendő. Jelöljük C_R-rel és C'_R-rel az $|p| = R$ körvonalnak a $\operatorname{Re} p = a$ egyenestől balra, illetve jobbra eső ívét, $a \pm i\,b$-vel pedig ezen ívek végpontjait (4. ábra).

Legyen $t > 0$; minthogy $R \to \infty$ esetén a C_R íven $1/p \to 0$, mégpedig arc p-re nézve egyenletesen, azért JORDAN lemmája* szerint

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{pt}}{p}\, dp = 0.$$

Következésképpen, CAUCHY rezidium-tétele alapján

$$\oint \frac{e^{pt}}{p}\, dp = \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p}\, dp + \int_{C_R} \frac{e^{pt}}{p}\, dp = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{p=0} \frac{e^{pt}}{p} = 2\pi i,$$



4. ábra

$R \to \infty$ határátmenet esetén pedig

$$f(t) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p}\, dp = 1 \qquad (t > 0)$$

Legyen most $t < 0$; akkor JORDAN lemmája értelmében

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C'} \frac{e^{pt}}{p}\, dp = 0,$$

CAUCHY tétele alapján

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p}\, dp + \int_{C'_a} \frac{e^{pt}}{p}\, dp = 0,$$

$R \to \infty$ esetén pedig

$$f(t) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p}\, dp = 0 \qquad (t < 0).$$

Nyilvánvaló tehát, hogy a vizsgált integrál éppen az egységugrást állítja elő, vagyis

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p}\, dp = 1(t).$$

Ennek megfelelően, $\tau_1 < \tau_2$ feltevéssel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{p(t-\tau)}}{p}\, dp = 1(t-\tau),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \frac{e^{-p\tau_1} - e^{-p\tau_2}}{p}\, dp = 1(t-\tau_1) - 1(t-\tau_2),$$

* L. pl. sorozatunk B. IV. kötetében.

amely utóbbi nyilván a (τ_1, τ_2) közön egységnyi impulzust adja (5*a*. ábra). Ezt figyelembe véve, az $f(t)$ eredeti függvényt a $(0, \tau_n)$ szakaszon közelítőleg

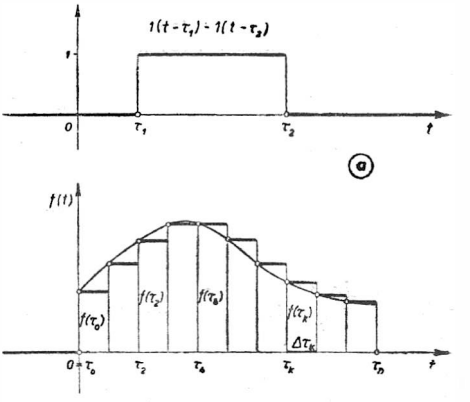
$$f(t) \approx \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_n) \frac{e^{-p\tau_k} - e^{-p(\tau_k+\Delta\tau_k)}}{p\,\Delta\tau_k} \Delta\tau_k \right\} dp$$

módon, pontosan pedig — a $\max \Delta\tau_k \to 0$ határátmenettel —

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left\{ \int_0^{\tau_n} f(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau \right\} dp$$

módon lehet előállítan impulzusok összegeként (5*b*. ábra). A $\tau_n \to \infty$ határátmenetnél a $\{\}$-beli kifejezés az $F(p)$ transzformáltba megy át. Végeredményben az $f(t)$ eredeti függvénynek a $(0, \infty)$ szakaszra érvényes integrálelőállítása így alakul:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp. \qquad (11')$$



5. ábra

Ez a LAPLACE-*transzformáció* ***inverziós formulája,*** minthogy az $f(t)$ eredeti függvényt állítja elő az $F(p)$ transzformált függvény segítségével.

A CARSON-*transzformáció inverziós formulája* — az $F(p) = \varphi(p)/p$ összefüggés értelmében —

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \frac{\varphi(p)}{p}\, dp \qquad (11'')$$

alakot ölt.

2'. Az inverziós formulára vonatkozik a következő

Tétel. *Ha $f(t)$ eredeti függvény, azaz eleget tesz az α) I° 1'—3' feltételnek, $F(p)$ dedig a transzformáltja, akkor az $f(t)$ függvényt — folytonossági pontjaiban — a (11') formula szolgáltatja, ahol az integrálás a $\operatorname{Re} p = a > \sigma_1$ egyenesek bármelyike mentén, főérték-értelemben (vagyis $a - ib$, $a + ib$ határok között, midőn $b \to \infty$) veendő.*

A szigorú bizonyítás céljából tekintsük az

$$f_b(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt} F(p)\, dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt} \left[\int_0^{\infty} f(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau \right] dp$$

függvényt. Minthogy a $\operatorname{Re} p \geqq a$ félsíkon a [ ]-beli integrál p-re nézve egyenletesen konvergens, azért az integrálás sorrendje felcserélhető, tehát

$$f_b(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty f(\tau)\,d\tau \int_{a-ib}^{a+ib} e^{p(t-\tau)}\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{t-\tau}\left[e^{p(t-\tau)}\right]_{a-ib}^{a+ib} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\tau)\, e^{a(t-\tau)}\,\frac{\sin b(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-t}^\infty g(\xi)\,\frac{\sin b\,\xi}{\xi}\,d\xi,$$

ahol $\xi = \tau - t$ és $g(\xi) = e^{-a\xi} f(\xi + t)$. Az utóbbi integrálást végezhetjük két szakaszra bontva, mégpedig $-t$-től 0-ig és 0-tól ∞-ig.

Lássuk először a $(0, \infty)$ szakasz menti integrált, átalakítás céljából felhasználva az $f(t)$ folytonossági helyein létező

$$\lim_{\xi\to 0} g(\xi) = g(0) = f(t)$$

határértéket, továbbá az integrálást $(0, r)$, (r, R) és (R, ∞) részszakaszokra bontva:

$$\int_0^\infty g(\xi)\,\frac{\sin b\,\xi}{\xi}\,d\xi =$$

$$= g(0)\int_0^r \frac{\sin b\,\xi}{\xi}\,d\xi + \int_0^r \frac{g(\xi)-g(0)}{\xi}\sin b\,\xi\,d\xi + \int_r^R g(\xi)\,\frac{\sin b\,\xi}{\xi}\,d\xi + \int_R^\infty g(\xi)\,\frac{\sin b\,\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Az r választható olyan kicsinyre, az R pedig olyan nagyra, hogy a 2. és 4. integrál abszolút értéke tetszőleges b-nél bármely adott ε-nál kisebb legyen (ez az improprius integrál konvergenciájából következik). A 3. tag parciális integrálással így alakul:

$$\int_r^R g(\xi)\,\frac{\sin b\,\xi}{\xi}\,d\xi = \left[-\frac{\cos b\,\xi}{b\,\xi}\,g(\xi)\right]_r^R + \frac{1}{b}\int_r^R \cos b\,\xi\left[\frac{g(\xi)}{\xi}\right]d\xi;$$

ez rögzített r és R, valamint $b \to \infty$ esetén nyilván 0-hoz tart. Végül az 1. tag, mely átalakítható

$$g(0)\int_0^r \frac{\sin b\,\xi}{\xi}\,d\xi = g(0)\int_0^{br} \frac{\sin\eta}{\eta}\,d\eta$$

módon, rögzített r, valamint $b \to \infty$ esetén nyilván $\pi\, g(0)/2$-höz tart. Ily módon

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^\infty g(\xi)\,\frac{\sin b\,\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{\pi}{2}g(0) = \frac{\pi}{2}f(t).$$

Hasonló módon nyerhető, hogy

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-t}^0 g(\xi)\,\frac{\sin b\,\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{\pi}{2}f(t).$$

Végeredményben bebizonyítottuk, hogy

$$\lim_{\to\infty} f_b(t) = f(t),$$

s ezzel a tételt igazoltuk.

3'. Az előbbi tételből következik az alábbi

Tétel. Az $F(p)$ transzformált mindenütt meghatározza az eredeti függvényt, kivéve az utóbbi szakadási helyeit.

Ui. a fentebbiek értelmében $F(p)$ csupán $f(t)$ folytonossági helyein határozza meg ennek értékeit a (11') szerint, szakadási helyein pedig nem.

II°. Végül lássuk, mi az (elégséges) feltétele annak, hogy egy adott $F(p)$ komplex változós függvény transzformáltja legyen valamely eredetinek.

Tétel. Ha az $F(p)$ függvény reguláris a $\operatorname{Re} p > \sigma_1$ *félsíkon, továbbá* $|p| \to \infty$ *esetén* arc p*-ben egyenletesen* 0*-hoz tart bármely* $\operatorname{Re} p \geqq a > \sigma_1$ *félsíkon, végül az*

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, dp \tag{12a}$$

integrál abszolút konvergens, akkor $F(p)$ valóban transzformáltja egy $f(t)$ eredeti függvénynek, s ez $F(p)$-vel a (11') szerint fejezhető ki.

Igazolásul tekintsük a

$$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-p_0 t} \left\{ \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp \right\} dt \tag{12b}$$

integrált, ahol $\operatorname{Re} p_0 > a$. Minthogy a $\{\ \}$-beli integrálban $p = a + i\tau$, $dp = i\, d\tau$ azért e^{at} kiemelhető az integráljel elé, a megmaradó integrál pedig az

$$\left| \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{i\tau t} F(p)\, dp \right| \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| F(a + i\tau) \right| d\tau$$

egyenlőtlenségnek tesz eleget. Ezen integrál t-ben nyilván egyenletesen konvergens, s így a (12b)-ben az integrálás sorrendje felcserélhető, vagyis

$$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, dp \int_0^{\infty} e^{(p-p_0)t}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{p - p_0}\, dp, \tag{12c}$$

mert $\operatorname{Re}(p - p_0) < 0$ és $t > 0$ miatt a belső integrál konvergens. Továbbá — feltételeinkből kifolyólag — a C_R': $|p| = R$, $\operatorname{Re} p > a$ körívdarab mentén $\max |F(p)| = \alpha_R \to 0$, midőn $R \to \infty$, következésképpen

$$\left| \int_{(C_R')} \frac{F(p)}{p - p_0}\, dp \right| \leqq \frac{\alpha_R}{R - |p_0|}\, \pi R,$$

tehát integrálunk $R \to \infty$ esetén zérushoz tart. Ily módon a (12c) egyenes menti integrál az $a - ib$ és $a + ib$ végpontú egyenesszakaszból és a C_R' körívdarabból álló zárt G_R' görbe menti integrállal helyettesíthető, azaz

$$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{G_R'} \frac{F(p)}{p - p_0}\, dp. \tag{12d}$$

Minthogy — a feltevés szerint — az $F(p)$ függvény a G'_R görbe belsejében reguláris, azért — CAUCHY integrálformulája értelmében — a jobb oldali integrál $F(p_0)$ értékű, következésképpen

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)\, dt = F(p_0), \tag{12e}$$

s ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyezzük még, hogy $t < 0$ esetén — JORDAN lemmája szerint —

$$\lim_{R\to\infty} \int_{(C'_R)} e^{pt} F(p)\, dp = 0,$$

s ily módon a (11′) egyenes menti integrál a G'_R zárt görbe menti integrállal helyettesíthető, mint előbb. Minthogy az $e^{pt}\,[F(p)]$ függvény a G'_R belsejében reguláris, azért $t < 0$ esetén

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(G'_R)} e^{pt} F(p)\, dp = 0, \tag{12f}$$

vagyis teljesül az α) I° 2′ feltétel. A (20′)-ből nyerhető továbbá, hogy

$$|f(t)| \leqq \frac{1}{2\pi} e^{at} \int_{-\infty}^{\infty} |F(a + i\eta)|\, d\eta = Me^{at}, \tag{12g}$$

vagyis az α) I° 3′ feltétel is teljesül. Az α) I° 1′ feltétel vizsgálatára nem térünk ki.

III°. Világítsuk meg *a* LAPLACE-*féle és a* FOURIER-*transzformáció kapcsolatát*! Az I° (11′) alatt talált

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp$$

inverziós formula — a $p = a + i\eta$, $dp = i\,d\eta$ figyelembevételével — átírható

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a + i\eta)\, e^{at}\, e^{i\eta t}\, d\eta$$

alakra, vagyis — az

$$f(t)\, e^{-at} = g(t), \qquad \frac{1}{2\pi} F(a + i\eta) = G(\eta) \tag{13a}$$

jelölések bevezetésével —

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\eta)\, e^{i\eta t}\, d\eta \tag{13b}$$

alakra. Hasonló megfontolásokkal az

$$F(p) = \int_0^\infty f(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau$$

LAPLACE-transzformációs formula

$$F(a + i\eta) = \int_0^\infty f(\tau)\, e^{-a\tau}\, e^{-i\eta\tau}\, d\tau$$

alakra, illetve

$$G(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty g(\tau)\, e^{-i\eta\tau}\, d\tau \tag{13c}$$

alakra írható át. A (13c) és (13b) éppen *a* FOURIER*-féle transzformációs*, illetve *inverziós formula*. A kettő egyesítéséből adódik az alábbi ún. FOURIER*-integrál:*

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_0^\infty g(\tau)\, e^{i\eta(t-\tau)}\, d\tau. \tag{13d}$$

Ily módon *az $f(t)$ és $F(p)$ függvény* LAPLACE*-transzformáltja, illetve -invertáltja megegyezik a $g(t) = e^{-at} f(t)$ és $G(\eta) = F(a + i\eta)/2\pi$ függvény* FOURIER*-transzformáltjával, illetve -invertáltjával,* ahol $a > \sigma_1$ [és σ_1 az $f(t)$ ún. emelkedési kitevője].

γ) Az új operátorszámítási eljárásról

I°. Az alábbiakban összefoglaljuk a LAPLACE-féle, illetve CARSON-féle transzformációra alapozott új operátorszámítás előnyeit a HEAVISIDE-féle régivel szemben, majd vázoljuk az új operátorszámítás általános eljárását.

A továbbiakban lesz alkalmunk meggyőződni arról, hogy *az új operátorszámítás* — lineáris rendszerbeli bekapcsolási jelenségek tárgyalásánál — *mindazt nyújtja, mint a régi, sőt még többet is,* nevezetesen:

1'. Szilárd matematikai alappal rendelkezik.
2'. Kiválasztja az operátorszámítással nem tárgyalható eseteket.
3'. Gyakran egyszerűsíti a számítási eljárást.
4'. Tetszőleges kezdeti feltételek esetén is alkalmazható.

II°. Mint látni fogjuk, *az új operátorszámítási eljárás főbb lépései* a következők:
1'. Az adott és keresett t változós függvények kapcsolatának felállítása (rendszerint differenciálegyenlet alakjában).
2'. Áttérés a p változós kapcsolatra, a LAPLACE-féle vagy a CARSON-féle transzformációnak az 1' kapcsolatra való alkalmazásával.
3'. A 2' transzformált kapcsolatból a keresett mennyiség transzformáltjának kiszámítása; ez rendszerint sokkal egyszerűbb, mint az 1' kapcsolat közvetlen megoldása.
4'. Visszatérés a keresett t változós függvényre, a LAPLACE-féle, illetve a CARSON-féle inverziónak a 3' transzformáltra való alkalmazásával; ezzel a feladat megoldást nyert.

Műszaki szempontból a fenti eljárás úgy tekintendő — a *b) β)* értelmében —, mint áttérés az időfüggvényről a frekvenciaspektrumokra (pontosabban amplitudósűrűségekre) a könnyebb számítás céljából, majd visszatérés a keresett időfüggvényre.

Az ismertetett eljárás célszerű kivitelezése céljából a *d)*-ben megismerkedünk majd a fontosabb transzformációs szabályokkal.

Példák és feladatok

Számítsuk ki a definíció alapján az alábbi eredeti függvények $\mathcal{L}$- és $\mathcal{C}$-transzformáltját:

A) $f(t) = 1(t)$, B) $f(t) = t$, C) $f(t) = e^{st}$ $(s = a + ib)$,

D) $f(t) = 1(t - t_0)$, E) $f(t) = t^2$, F) $f(t) = t\,e^{st}$ $(s = a + ib)$,

G) $f(t) = s^t$ $(\mathrm{Re}\, s > 0)$,

(ahol valamennyi függvény az $1(t)$ egységugrással megszorozva értendő!) Adjuk meg az integrálok $\mathrm{Re}\, p > \sigma_0$ konvergencia- (regularitási) félsíkját.

Megoldás. Az adott függvények valóban eredetiek, mert eleget tesznek az α) I° 1′—3′ feltételeknek. Transzformáltjuk — a (4)—(6) formulák szerint —

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt, \qquad \mathcal{C}[f(t)] = p \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt = p\, \mathcal{L}[f(t)].$$

A) $$\mathcal{L}[1(t)] = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt}\, dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^\infty = \frac{1}{p}, \qquad \mathrm{Re}\, p > 0 = \sigma_0;$$

$$\mathcal{C}[1(t)] = p\, \mathcal{L}[1(t)] = p \cdot \frac{1}{p} = 1.$$

B) $$\mathcal{L}[t] = \int_0^\infty t\, e^{-pt}\, dt = \left[-\frac{t\, e^{-pt}}{p} \right]_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt}\, dt = 0 + \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2},$$

$$\mathrm{Re}\, p > 0 = \sigma_0; \qquad \mathcal{C}[t] = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

C) $$\mathcal{L}[e^{st}] = \int_0^\infty e^{st}\, e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty e^{-(p-s)t}\, dt = \frac{1}{p - s}, \qquad \mathrm{Re}\,(p - s) > 0,$$

azaz $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, s = a = \sigma_0$; $\mathcal{C}[e^{st}] = \dfrac{p}{p - s}$.

D) $$\mathcal{L}[1(t - t_0)] = \int_{t_0}^\infty 1 \cdot e^{-pt}\, dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p} \right]_{t_0}^\infty = \frac{1}{p} e^{-pt_0},$$

$\mathrm{Re}\, p > 0 = \sigma_0$; $\mathcal{C}[1(t - t_0)] = e^{-pt_0}$.

E) $$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{p^3} = \frac{1}{p}\, \mathcal{C}[t^2], \qquad \mathrm{Re}\, p > 0 = \sigma_0.$$

F) $$\mathcal{L}[t\, e^{st}] = \frac{1}{(p - s)^2} = \frac{1}{p}\, \mathcal{C}[t\, e^{st}], \qquad \mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, s = a = \sigma_0.$$

G) $$\mathcal{L}[s^t] = \mathcal{L}[e^{t \ln s}] = \frac{1}{p - \ln s} = \frac{1}{p}\, \mathcal{C}[s^t], \qquad \mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re} \ln s = \sigma_0.$$

d) A Laplace-transzformációs számítás főbb szabályai

α) Linearitás. Hasonlósági tétel

I°. Linearitás. Legyen az eredeti függvény az

$$f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \ldots + c_n f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t)$$

lineáris kombináció. Ennek $\mathfrak{L}$-transzformáltja — tekintettel e transzformáció (mint minden integráció) lineáritására — így alakul:

$$\mathfrak{L}[f(t)] = \mathfrak{L}\left[\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathfrak{L}[f_k(t)] = \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p) = F(p) \tag{1}$$

Eszerint *a lineáris kombináció $\mathfrak{L}$-transzformáltja az $\mathfrak{L}$-transzformáltak hasonló lineáris kombinációjával.*

Az (1)-ből következik *a λ paraméter szerinti derivált transzformálási szabálya:*

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d}{d\lambda} f(t, \lambda)\right] = \mathfrak{L}\left[\frac{f(t, \lambda + d\lambda) - f(t, \lambda)}{d\lambda}\right] = \frac{F(p, \lambda + d\lambda) - F(p, \lambda)}{d\lambda} =$$

$$= \frac{d}{d\lambda} F(p, \lambda), \tag{2}$$

valamint *a λ paraméter szerinti integrál transzformálási szabálya:*

$$\mathfrak{L}\left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(t, \lambda)\, d\lambda\right] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathfrak{L}[f(t, \lambda)]\, d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(p, \lambda)\, d\lambda. \tag{3}$$

Az (1), (2), (3) értelemszerűen igaz a $\mathfrak{C}$-transzformációra is.

II°. Hasonlósági tétel. Transzformáljuk az $f(t/T)$ függvényt, ahol T tetszőleges állandó:

$$\mathfrak{L}\left[f\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \int_0^\infty f\left(\frac{t}{T}\right) e^{-pt}\, dt = T \int_0^\infty f(\tau)\, e^{-pT\tau}\, d\tau = T \cdot F(pT),$$

$$\mathfrak{C}\left[f\left(\frac{t}{T}\right)\right] = p \int_0^\infty f\left(\frac{t}{T}\right) e^{-pt}\, dt = pT \int_0^\infty f(\tau)\, e^{pT\tau}\, d\tau = \varphi(pT).$$

Végeredményben:

$$\mathfrak{L}\left[f\left(\frac{t}{T}\right)\right] = T \cdot F(pT), \qquad \mathfrak{C}\left[f\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \varphi(pT). \tag{4'; 4''}$$

A (4'') és a

$$p \int_0^\infty e^{-pt}\, dt = \left[e^{-pt}\right]_\infty^0 = 1 \qquad (\mathrm{Re}\, p > 0)$$

eredmény alapján *az eredeti függvény kezdeti és végső határértéke* így adódik:

$$f(+0) = \varphi(\infty), \quad f(+\infty) = \varphi(0), \tag{5a, b}$$

ahol $f(+0)$ jobb oldali határértéket jelent.* $\mathfrak{L}$-transzformáció esetén $\varphi(p)$ helyett $pF(p)$ limeszelendő, azaz

$$f(+0) = \lim_{p \to \infty} pF(p), \qquad f(+\infty) = \lim_{p \to 0} pF(p). \tag{5c}$$

* Szigorúbb tárgyalását l. pl. *Wagner* [7], *Лаврентьев—Шабат* [2].

β) **Differenciálás, integrálás *t* és *p* szerint**

I°. A *t* szerinti deriválat transzformálása. Az $f'(t)$ deriváltat $\mathfrak{L}$-*transzformálva*, parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\mathfrak{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt}\, dt = \Big[f(t)\, e^{-pt}\Big]_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt =$$

$$= -f(+0) + p\,F(p), \quad \text{hacsak } |f(t)| < M\, e^{\sigma_1 t} \text{ és } \operatorname{Re} p > \sigma_1;$$

végeredményben:

$$\boxed{\mathfrak{L}[f'(t)] = -f(0) + p\,F(p),} \tag{6a'}$$

ahol $f(0)$ jobboldali határértéknek tekintendő.

A (6a) szabály újabb alkalmazásával az

$$\mathfrak{L}[f''(t)] = -f'(0) + p\,[-f(0) + p\,F(p)] = -f'(0) - p\,f(0) + p^2\,F(p) \tag{6b'}$$

formula, további $(n-2)$-szeri alkalmazásával pedig az

$$\mathfrak{L}[f^{(n)}(t)] = -f^{(n-1)}(0) - p\,f^{(n-2)}(0) - \ldots - p^{(n-1)}f(0) + p^n\,F(p) \tag{6c'}$$

formula adódik, ahol a kezdeti értékek szintén jobb oldali határértékekként értendők.

Speciálisan *null-feltételek*, azaz

$$f(0) = 0, \quad f(0) = f'(0) = 0, \ldots, \quad f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

esetén formuláink

$$\mathfrak{L}[f'(t)] = p\,F(p), \quad \mathfrak{L}[f''(t)] = p^2\,F(p), \ldots, \quad \mathfrak{L}[f^{(n)}(t)] = p^n\,F(p) \tag{6d'}$$

módon alakulnak.

A megfelelő $\mathfrak{C}$-*transzformációs* szabályok — hasonló megfontolásokkal — a következő alakban nyerhetők:

$$\mathfrak{C}[f'(t)] = -p\,f(0) + p\,\varphi(p), \quad \mathfrak{C}[f''(t)] = -p\,f'(0) - p^2 f(0) + p^2\,\varphi(p), \tag{6a'', b''}$$

$$\mathfrak{C}[f^{(n)}(t)] = -p\,f^{(n-1)}(0) - p^2 f^{(n-2)}(0) - \ldots - p^n f(0) + p^n\,\varphi(p), \tag{6c''}$$

ahol a kezdeti értékek szintén jobboldali határértékek;

$$\mathfrak{C}[f'(t)] = p\,\varphi(p), \quad \mathfrak{C}[f''(t)] = p^2\,\varphi(p), \ldots, \quad \mathfrak{C}[f^{(n)}(t)] = p^n\,\varphi(p), \tag{6d''}$$

amelyek a null-feltételek esetére vonatkoznak.

A fentiekből nyilvánvaló, hogy a $\mathfrak{L}$-, illetve $\mathfrak{L}$-transzformációra alapozott operátorszámítás módot nyújt tetszőleges kezdeti feltételek figyelembevételére, s ezzel jelentősen továbbfejlesztette a csupán null-feltételek mellett érvényes HEAVISIDE-féle operátorszámítást.

Mellesleg, a null-feltételekre nyert fentebbi formulák összhangban vannak HEAVISIDE megfelelő $p = d/dt$-operátoros formuláival. Ha pl. — a *b) α)* (1a) szerint —

$$f(t) = \varphi(p)\cdot 1(t), \quad \text{akkor} \quad \frac{d^n}{dt^n} f(t) = p^n \cdot \varphi(p)\cdot 1(t),$$

az a) *α)* (1) értelmében és összhangban a most felírt (6d'')-vel.

II°. A t szerinti integrál transzformálása. Az $f(\tau)$ függvény $(0, t)$ szakaszon vett integrálját $\mathcal{L}$-transzformálva, parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] e^{-pt}\,dt = \left[-\frac{1}{p}\,e^{-pt}\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt =$$

$$= 0 + \frac{F(p)}{p},$$

mert $|f(t)| < M\,e^{\sigma_1 t}$ és $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_1$ esetén $t \to \infty$ határátmenetnél

$$\left|e^{-pt}\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right| < e^{-\sigma t}\int_0^t M\,e^{\sigma_1 \tau}\,d\tau = e^{-\sigma t}\cdot\frac{M}{\sigma_1}\,(e^{\sigma_1 t} - 1) \to 0;$$

végeredményben:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{F(p)}{p}\,.} \tag{7a}$$

E szabály újból alkalmazásával az

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t d\tau \int_0^\tau f(\tau_1)\,d\tau_1\right] = \frac{F(p)/p}{p} = \frac{F(p)}{p^2}\,, \tag{7b}$$

a formula további $(n-2)$-szeri alkalmazásával pedig az

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{n-2}} f(\tau_{n-1})\,d\tau_{n-1}\right] = \frac{F(p)}{p^n} \tag{7c}$$

formula adódik.

A $\mathcal{L}$-transzformációval értelemszerűen hasonló formulák nyerhetők.

III°. A transzformált p szerinti differenciálása. Mint tudjuk, az $F(p)$ transzformált függvény a $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ félsíkon reguláris, s így ott akárhányszor differenciálható p szerint. Az integráljel alatti differenciálás megengedett, mert a differenciálandó integrálok valamennyien p szerint egyenletesen konvergálnak a $\operatorname{Re} p \geqq \sigma_* > \sigma_1$ félsíkok bármelyikén.

Ezek szerint *az $\mathcal{L}$-transzformációs formulák*

$$F'(p) = -\int_0^\infty t\,f(t)\,e^{-pt}\,dt = -\mathcal{L}[t\,f(t)], \tag{8a'}$$

$$F''(p) = \int_0^\infty t^2 f(t)\,e^{-pt}\,dt = \mathcal{L}[t^2 f(t)], \tag{8b'}$$

. . . . . .

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t)\,e^{-pt}\,dt = (-1)^n\,\mathcal{L}[t^n f(t)] \tag{8c'}$$

módon, *a C-transzformációs formulák* pedig

$$\varphi'(p) = \frac{1}{p} \cdot p \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt - p \int_0^\infty t f(t)\, e^{-pt}\, dt = C\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau - t f(t)\right], \quad (8a'')$$

$$\varphi''(p) = \frac{1}{p} \cdot C\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau - t f(t)\right] - C\left[t \int_0^t f(\tau)\, d\tau - t^2 f(t)\right] =$$

$$= C\left[\int_0^t d\tau \int_0^\tau f(\tau_1)\, d\tau_1 - \int_0^t \tau f(\tau)\, d\tau - t \int_0^t f(\tau)\, d\tau + t^2 f(t)\right] =$$

$$= C\left[-2 \int_0^t \tau f(\tau)\, d\tau + t^2 f(t)\right], \quad (8b'')$$

. . . . . .

$$\varphi^{(n)}(p) = (-1)^n\, C\left[t^n f(t) - n \int_0^t t^{n-1} f(t)\, dt\right] \quad (8c'')$$

módon alakulnak, az utóbbiak a II° és parciális integrálás igénybevételével. A C-transzformáció p tényezője itt — láthatóan — bonyolítja a formulákat.

IV°. A transzformált p szerinti integrálása. Integráljuk az $F(q)$ transzformált függvényt a $\mathrm{Re}\, q \geqq \sigma_* > \sigma_1$ félsíkok valamelyikében, p és ∞ között húzódó tetszőleges görbe mentén. Tekintettel a

$$|f(t)\, e^{-qt}| \leqq M\, e^{\sigma_1 t}\, e^{-\sigma_* t} = M\, e^{-(\sigma_* - \sigma_1)t}$$

becslésre, a félsíkon az $\int_0^\infty f(t)\, e^{-qt}\, dt$ integrál q szerint egyenletesen konvergens. Ezért a q és t szerinti integrálás felcserélhető, tehát

$$\int_p^\infty F(q)\, dq = \int_p^\infty dq \int_0^\infty f(t)\, e^{-qt}\, dt = -\int_0^\infty f(t)\, dt \int_p^\infty e^{-qt}\, dq = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\, e^{-pt}\, dt;$$

végeredményben:

$$\boxed{\int_p^\infty F(q)\, dq = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].} \quad (9a)$$

E szabály n szerinti alkalmazásával a

$$\int_p^\infty dq \int_q^\infty dq_1 \ldots \int_{q_{n-2}}^\infty F(q_{n-1})\, dq_{n-1} = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right] \quad (9b)$$

formula adódik.

A megfelelő C-transzformációs formulák — bonyolultságuk miatt — nem használatosak.

γ) Eltolás a t tengelyen és a p síkon

I°. Eltolás a t tengelyen. Az $f(t)$ eredeti függvény görbéjét a t tengely mentén τ mértékben (azaz $|\tau|$ egységgel, sign τ értelemben) eltolva, az új görbe (6. ábra)

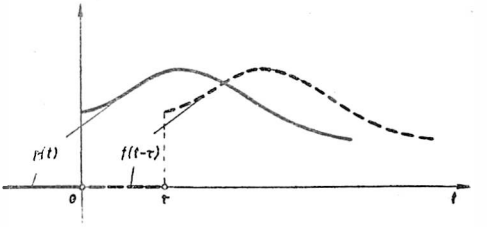
$$f_\tau(t) = f(t - \tau) \tag{10a}$$

függvénnyel jellemezhető. Alkalmazzuk e függvényre az $\mathfrak{L}$-transzformációt, figyelembe véve, hogy $t < \tau$-nál $f(t - \tau) = 0$:

$$\mathfrak{L}[f_\tau(t)] = \int_\tau^\infty f(t - \tau)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty f(u)\, e^{-p(u+\tau)}\, du = e^{-p\tau} \int_0^\infty f(u)\, e^{-pu}\, du;$$

végeredményben:

$$\boxed{\mathfrak{L}[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} F(p).} \tag{10b}$$



6. ábra

A megfelelő $\mathfrak{C}$-transzformációs formula hasonló.

II°. Eltolás a p síkon. A p sík koordináta-rendszerét q vektorral eltolva, az $F(p)$ transzformált függvény helyébe az $F(p - q)$ függvény lép. E függvény — az

$$F(p - q) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-(p-q)t}\, dt = \int_0^\infty [f(t)\, e^{qt}]\, e^{-pt}\, dt = \mathfrak{L}[f(t)\, e^{qt}] \tag{11'}$$

átalakítás értelmében — az $f(t)\, e^{qt}$ szorzat $\mathfrak{L}$-transzformáltja.

A megfelelő $\mathfrak{C}$-transzformációs formula bonyolultabb:

$$\varphi(p - q) = (p - q) \int_0^\infty f(t)\, e^{-(p-q)t}\, dt =$$

$$= p \int_0^\infty [f(t)\, e^{qt}]\, e^{-pt}\, dt - \frac{q}{p} \cdot p \int_0^\infty [f(t)\, e^{qt}]\, e^{-pt}\, dt = \mathfrak{C}\left[f(t)\, e^{qt} - q \int_0^t f(\tau)\, e^{q\tau}\, d\tau\right]. \tag{11''}$$

Példák és feladatok

1. Állapítsuk meg — az $\mathfrak{L}[e^{st}]$ ismeretében — az alábbi függvények transzformáltját:

A) $f(t) = \operatorname{ch} \lambda t$, B) $f(t) = \cos \omega t$, (λ, ω valós)

C) $f(t) = \operatorname{sh} \lambda t$, D) $f(t) = \sin \omega t$,

E) $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, F) $f(t) = e^{-\lambda t} \cos \omega t$;

G) $f(t) = \cos^2 \omega t$, H) $f(t) = \frac{1}{\lambda^2}(\operatorname{ch} \lambda t - 1)$,

I) $f(t) = (1 - \lambda t)\, e^{-\lambda t}$, J) $f(t) = \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{b - a}$.

Megoldás. Felhasználandó e függvények exponenciális alakja, valamint az α) I° (1) formulával kifejezett linearitás.

A) $$\mathcal{L}[\operatorname{ch}\lambda t] = \mathcal{L}\left|\frac{1}{2}(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t})\right| = \frac{1}{2}\{\mathcal{L}[e^{\lambda t}] + \mathcal{L}[e^{-\lambda t}]\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{p-\lambda} + \frac{1}{p+\lambda}\right| = \frac{p}{p^2-\lambda^2} = \frac{1}{p}\mathcal{C}[\operatorname{ch}\lambda t], \quad \operatorname{Re} p > |\lambda|.$$

B) $$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \mathcal{L}\left|\frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\right| = \frac{1}{2}\{\mathcal{L}[e^{i\omega t}] + \mathcal{L}[e^{-i\omega t}]\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right| = \frac{p}{p^2+\omega^2} = \frac{1}{p}\mathcal{C}[\cos\omega t], \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

C) $$\mathcal{L}[\operatorname{sh}\lambda t] = \mathcal{L}\left|\frac{1}{2}(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})\right| = \frac{\lambda}{p^2-\lambda^2} \quad \operatorname{Re} p > |\lambda|.$$

D) $$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \mathcal{L}\left|\frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\right| = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

E) $$\mathcal{L}[A\cos(\omega t + \varphi)] = A\cos\varphi\cdot\mathcal{L}[\cos\omega t] - A\sin\varphi\cdot\mathcal{L}[\sin\omega t] =$$

$$= \frac{A\cos\varphi\cdot p - A\sin\varphi\cdot\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{1}{p}\mathcal{C}[A\cos(\omega t+\varphi)], \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

F) $$\mathcal{L}[e^{-\lambda t}\cos\omega t] = \frac{1}{2}\{\mathcal{L}[e^{(-\lambda+i\omega)t} + \mathcal{L}[e^{-(\lambda+i\omega)t}]\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{p+\lambda-i\omega} + \frac{1}{p+\lambda+i\omega}\right| = \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2} = \frac{1}{p}\mathcal{C}[e^{-\lambda t}\cos\omega t].$$

G) $$\mathcal{C}[\cos^2\omega t] = \mathcal{C}\left|\frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t)\right| = \frac{p^2+2\omega^2}{p^2+4\omega^2} = p\,\mathcal{L}[\cos^2\omega t].$$

H) $$\mathcal{C}\left|\frac{1}{\lambda^2}(\operatorname{ch}\lambda t - 1)\right| = \frac{1}{p^2-\lambda^2} = p\,\mathcal{L}\left|\frac{1}{\lambda^2}(\operatorname{ch}\lambda t - 1)\right|.$$

I) $$\mathcal{C}[(1-\lambda t)e^{-\lambda t}] = \frac{p^2}{(p+\lambda)^2} = p\,\mathcal{L}[(1-\lambda t)e^{-\lambda t}].$$

J) $$\mathcal{C}\left[\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{b-a}\right] = \frac{p}{(p+a)(p+b)} = p\,\mathcal{L}\left[\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{b-a}\right].$$

2. Transzformáljuk az alábbi $f(t, \lambda)$ függvények paraméter szerinti deriváltját, illetve integrálját.

A) $f(t, \lambda) = e^{\lambda t}$; B) $f(t, \omega) = \sin\omega t$;

C) $f(\lambda, t) = e^{-\lambda t}\cos\omega t$; D) $f(\omega, t) = \cos\omega t$.

Megoldás. Az α) I° (2—3) formulákat alkalmazzuk.

A) $$\mathcal{L}\left[\frac{d}{d\lambda}\,e^{\lambda t}\right] = \mathcal{L}[t\,e^{\lambda t}] = \frac{d}{d\lambda}\,\mathcal{L}[e^{\lambda t}] = \frac{d}{d\lambda}\,\frac{1}{p-\lambda} = \frac{1}{(p-\lambda)^2},$$

összhangban a c) 1. *F*) példával, továbbá

$$\mathcal{L}\left[\int_a^b e^{\lambda t}\,d\lambda\right] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}\right] = \int_a^b \mathcal{L}[e^{\lambda t}]\,d\lambda = \int_a^b \frac{d\lambda}{p-\lambda} = \ln\frac{p-a}{p-b}.$$

B) $$\mathcal{L}\left[\frac{d}{d\omega}\sin\omega t\right] = \mathcal{L}[t\cos\omega t] = \frac{d}{d\omega}\,\frac{\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

C) $$\mathcal{L}\left[\frac{d}{d\lambda}\,e^{-\lambda t}\cos\omega t\right] = \mathcal{L}[-t\,e^{-\lambda t}\cos\omega t] = \frac{d}{d\lambda}\,\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2} =$$

$$= -\frac{(p+\lambda)^2-\omega^2}{[(p+\lambda)^2+\omega^2]^2}.$$

D) $$\mathcal{L}\left[\int_0^\omega \cos\omega t\,d\omega\right] = \mathcal{L}\left[\frac{\sin\omega t}{t}\right] = \int_0^\omega \frac{p}{p^2+\omega^2}\,d\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{p}.$$

3. Transzformáljuk, illetve invertáljuk — a hasonlósági tétel alapján — az alábbi függvényeket:

A) $f\left(\frac{t}{3}\right) = e^{\frac{\lambda t}{3}}$, B) $f(5t) = \cos 5\omega t$,

C) $f(t) = e^{-0{,}5t}\cos\pi t$, D) $F(p) = \dfrac{10^6}{(p+0{,}02\cdot 10^6)\,(p+0{,}8\cdot 10^6)}$.

Megoldás. Az α) I° (4′) formulát alkalmazzuk.

A) $$\mathcal{L}\left[e^{\frac{\lambda t}{3}}\right] = \frac{3}{3p-\lambda} = \frac{1}{p-\frac{\lambda}{3}}.$$

B) $$\mathcal{L}[\sin 5\omega t] = \frac{\frac{\omega}{5}}{\frac{p^2}{5^2}+\omega^2} = \frac{5\omega}{p^2+25\omega^2}.$$

C) $$\mathcal{L}[e^{-0{,}5t}\cos\pi t] = \frac{p+0{,}5}{(p+0{,}5)^2+\pi^2} = \frac{1}{p}\,\mathcal{L}[e^{-0{,}5t}\cos\pi t],$$

D) $$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10^6}{(p+0{,}02\cdot 10^6)\,(p+0{,}8\cdot 10^6)}\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10^{-6}}{(10^{-6}p+0{,}02)\,(10^{-6}p+0{,}8)}\right] =$$

$$= 10^{-6}\,\mathcal{L}\left[\frac{1}{0{,}78}\left(\frac{1}{10^{-6}p+0{,}02}-\frac{1}{10^{-6}p+0{,}8}\right)\right] = \frac{1}{0{,}78}\left(e^{-0{,}02\cdot 10^6 t}-e^{-0{,}8\cdot 10^6 t}\right).$$

4. Fejezzük ki az alábbi függvények kezdeti és végső határértékét $\mathcal{L}$-transzformáltjuk alkalmas határértékével.

A) $f(t)=e^{-\lambda t}$, B) $f(t)=\sin\omega t$, C) $f(t)=\dfrac{1-(1+\lambda t)\,e^{-\lambda t}}{\lambda^2}$,

D) $f(t)=e^{-\lambda t}\left(\cos\omega t+\dfrac{a-\lambda}{\omega}\sin\omega t\right)$, E) $f(t)=t\,e^{-\lambda t}\cos\omega t$;

F) $F(p)=\dfrac{a_1 p+a_0}{p(p^2+b_1 p+b_0)}$, $f(0),\ f'(0),\ f''(0)=?$

Megoldás. At α) I° (5a, b) formulát alkalmazzuk.

A) $$f(+0)=\lim_{t\to 0}e^{-t}=\varphi(\infty)=\lim_{p\to\infty}\frac{p}{p+1}=1,$$

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}e^{-t}=\varphi(0)=\lim_{p\to 0}\frac{p}{p+1}=0.$$

B) $$f(0)=\lim_{t\to 0}\sin\omega t=\varphi(\infty)=\lim_{p\to\infty}\frac{\omega p}{p^2+\omega^2}=0,$$

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}\sin\omega t \quad \text{határozatlan.}$$

C) $$\lim_{t\to 0}\frac{1-(1+\lambda t)\,e^{-\lambda t}}{\lambda^2}=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{(p+\lambda)^2}=0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-(1+\lambda t)e^{-\lambda t}}{\lambda^2}=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{(p+\lambda)^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

D) $$\varphi(p)=p\,F(p)=\frac{p(p+a)}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \qquad f(0)=1, \quad f(\infty)=0.$$

E) $$\varphi(p)=p\,F(p)=\frac{[(p+\lambda)^2-\omega^2]\,p}{[(p+\lambda)^2+\omega^2]^2}, \qquad f(0)=0, \quad f(\infty)=0.$$

F) $f(0) = \lim_{p\to\infty} p\,F(p) = \lim_{p\to\infty} \dfrac{a_1 p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0} = 0;$

$$\mathfrak{L}[f'(t)] = p\,F(p) - f(0) = \frac{a_1 p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0},$$

$$f'(0) = \lim_{p\to\infty} p\,\mathfrak{L}[f'(t)] = \lim_{p\to\infty} \frac{p(a_1 p + a_0)}{p^2 + b_1 p + b_0} = a_1;$$

$$\mathfrak{L}[f''(t)] = p\,\mathfrak{L}[f'(t)] - f'(0) = \frac{p(a_1 p + a_0)}{p^2 + b_1 p + b_0} - a_1 = \frac{(a_0 - a_1 b_1)\,p - a_1 b_0}{p^2 + b_1 p + b_0}$$

$$f''(0) = \lim_{p\to\infty} p\,\mathfrak{L}[f''(t)] = \lim_{p\to\infty} \frac{(a_0 - a_1 b_1)\,p^2 - a_1 b_0 p}{p^2 + b_1 p + b_0} = a_0 - a_1 b_1.$$

5. Állapítsuk meg az alábbi eredeti függvények n-edik deriváltjának $\mathfrak{L}$-, illetve $\mathfrak{C}$-transzformáltját, alacsonyabb deriváltjaik kezdeti értékének figyelembevételével:

A) $f(t) = e^{\lambda t}$, $n = 2$, $\mathfrak{L}$; B) $f(t) = \cos\omega t$, $n = 4$, $\mathfrak{C}$;

C) $f(t) = t\,e^{-\lambda t}$, $n = 1$, $\mathfrak{L}$; D) $f(t) = \dfrac{t^2 e^{-at}}{2}$, $n = 1$, $\mathfrak{C}$.

Megoldás. A β) I° (6c′) és (6c″) formulát alkalmazzuk.

A) $\mathfrak{L}[f''(t)] = -f'(0) - p\,f(0) + p^2 F(p) = -\lambda - p + p^2 \dfrac{1}{p-\lambda} =$

$$= \frac{-p^2 + \lambda^2 + p^2}{p-\lambda} = \frac{\lambda^2}{p-\lambda} = \mathfrak{L}[\lambda^2 e^{\lambda t}].$$

B) $\mathfrak{C}[f^{(4)}(t)] = -p\,f^{(3)}(0) - p^2 f''(0) - p^3 f'(0) - p^4 f(0) + p^4\varphi(p) =$

$$= p^2\omega^2 - p^4 + p^4\frac{p^2}{p^2+\omega^2} = \frac{p^4\omega^2 + p^2\omega^4 - p^6 - p^4\omega^2 + p^6}{p^2+\omega^2} =$$

$$= \frac{p^2\omega^4}{p^2+\omega^2} = \mathfrak{C}[\omega^3\cos\omega t].$$

C) $f(0) = 0$, $\mathfrak{L}[f'(t)] = \mathfrak{L}[(1 - \lambda t)\,e^{-\lambda t}] = p\,F(p) = \dfrac{p}{(p+\lambda)^2}$.

D) $f(0) = 0$, $\mathfrak{C}[f'(t)] = \mathfrak{C}\left[\left(t - \dfrac{\lambda}{2}t^2\right)e^{-\lambda t}\right] = p\,\varphi(p) = \dfrac{p^2}{(p+\lambda)^3}$.

6. Állapítsuk meg az alábbi eredeti függvények n-edik integráljának, $\mathfrak{L}$-, illetve $\mathfrak{C}$-transzformáltját:

A) $f(t) = 1(t)$, n, $\mathfrak{L}$; B) $f(t) = t\,e^{\lambda t}$, n, $\mathfrak{C}$.

C) $f(t) = e^{-\lambda t}\left(\cos\omega t + \dfrac{a-\lambda}{\omega}\sin\omega t\right)$, $n = 1$, $\mathfrak{L}$.

Megoldás. A β) II° (7c) formulát alkalmazzuk.

A) $$\mathcal{L}\left[\int_0^t d\tau \int_0^{\tau} d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{n-2}} 1 \cdot d\tau_{n-1}\right] = \frac{\mathcal{L}[1(t)]}{p^n} = \frac{1}{p^{n+1}} = \mathcal{L}\left[\frac{t^n}{n!}\right].$$

B) $$\mathcal{L}\left[\int_0^t d\tau \int_0^{\tau} d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{n-2}} \tau_{n-1}\, e^{\lambda\tau_{n-1}}\, d\tau_{n-1}\right] = \frac{\mathcal{L}[t\, e^{\lambda t}]}{p^n} = \frac{1}{p^{n-1}(p-\lambda)^2}.$$

C) $$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] =$$

$$= \mathcal{L}\left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2+\omega^2}\left(\frac{\lambda^2+\omega^2-\lambda a}{\omega}\sin\omega t - a\cos\omega t\right) + \frac{a}{\lambda^2+\omega^2}\right] =$$

$$= \frac{F(p)}{p} = \frac{p-a}{p[(p+\lambda)^2+\omega^2]}$$

7. Határozzuk meg az alábbi eredeti függvények t^n-szeresének $\mathcal{L}$-transzformáltját:

A) $f(t) = 1(t)$, n; B) $f(t) = e^{\lambda t}$, n; C) $f(t) = \cos\omega t$, $n = 1$.

Megoldás. A β) III° (8c′) formulát alkalmazzuk.

A) $$\mathcal{L}[t^n \cdot 1(t)] = \mathcal{L}[t^n] = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\frac{1}{p} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad \operatorname{Re} p > 0,$$

összhangban a 6. A) példával.

B) $$\mathcal{L}[t^n e^{\lambda t}] = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\frac{1}{p-\lambda} = \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}, \qquad \operatorname{Re} p > \lambda.$$

C) $$\mathcal{L}[t\cos\omega t] = \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}, \qquad \operatorname{Re} p > 0.$$

8. Állapítsuk meg az alábbi eredeti függvények t^{-1}-szeresének $\mathcal{L}$-transzformáltját:

A) $f(t) = e^{bt} - e^{at}$, B) $f(t) = \sin t$; $\mathcal{L}[\operatorname{Si} t] = \mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau\right] = ?$

C) $f(t) = t\sin\omega t$, D) $f(t) = t\, e^{-\lambda t}\cos\omega t$.

Megoldás. A β) IV° (9a) formulát alkalmazzuk.

A) $$\mathcal{L}\left[\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}\right]=\int_p^\infty\left(\frac{1}{q-b}-\frac{1}{q-a}\right)dq=\left[\ln\frac{q-b}{q-a}\right]_p^\infty=$$

$$=\left[\ln\frac{1-\frac{b}{q}}{1-\frac{a}{q}}\right]_p^\infty=\ln 1-\ln\frac{1-\frac{b}{p}}{1-\frac{a}{p}}=\ln\frac{p-b}{p-a}.$$

B) $$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_p^\infty\frac{dq}{q^2+1}=\left[\operatorname{arctg} q\right]_p^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p=\operatorname{arctg}\frac{1}{p}.$$

Eredményünk és a β) II° (7a) formula alapján

$$\mathcal{L}[\operatorname{Si} t]=\mathcal{L}\left[\int_0^t\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau\right]=\frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p\right)=\frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{1}{p}.$$

C) $$\mathcal{L}[\sin\omega t]=\int_p^\infty\frac{2\omega q}{(q^2+\omega^2)^2}\,dq=\left[\frac{-\omega}{q^2+\omega^2}\right]_p^\infty=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

D) $$\mathcal{L}[e^{-\lambda t}\cos\omega t]=\int_p^\infty\frac{(q+\lambda)^2-\omega^2}{[(q+\lambda)^2+\omega^2]}\,dq=\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}.$$

9. Határozzuk meg az alábbi, eltolt argumentumú eredeti függvények $\mathcal{L}$-transzformáltját:

A) $1(t-\tau)$, B) $e^{\lambda(t-\tau)}$, C) $(t-a)^n$, D) $\sin\omega(t-\tau)$,

E) $t\cdot 1(t-a)$, F) $t^2\cdot 1(t-a)$.

Megoldás. A γ) I° (10b) formulát alkalmazzuk.

A) $$\mathcal{L}[1(t-\tau)]=e^{-p\tau}\,\mathcal{L}[1(t)]=\frac{e^{-p\tau}}{p}.$$

B) $$\mathcal{L}[e^{\lambda(t-\tau)}]=\frac{e^{-p\tau}}{p-\lambda}.$$

C) $$\mathcal{L}[(t-a)^n]=\frac{n!\,e^{-pa}}{p^{n+1}}.$$

D) $$\mathcal{L}[\sin\omega(t-\tau)]=\frac{\omega\,e^{-p\tau}}{p^2+\omega^2}.$$

E) $$\mathcal{L}[t\cdot 1(t-a)]=e^{-ap}\,\mathcal{L}[(t+a)\cdot 1(t)]=e^{-ap}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{a}{p}\right).$$

F) $$\mathcal{L}[t^2\cdot 1(t-a)]=e^{-ap}\,\mathcal{L}[(t+a)^2\cdot 1(t)]=e^{-ap}\left(\frac{2}{p^3}+\frac{2a}{p^2}+\frac{a^2}{p}\right).$$

10. Határozzuk meg a 7. ábrán látható ($\omega = 2\pi$ körfrekvenciájú, $T = 1$ periódusú, $A = 2$ amplitudójú, eltolt szinuszhullámok szuperpozíciójával képzett) függvény $\mathfrak{L}$-transzformáltját.

Megoldás. Az ábrázolt függvény — mint könnyen ellenőrizhető — az

$$f(t) = 2\,[\sin\omega(t-1) - \sin\omega(t-3) + \sin\omega(t-5) - + \ldots]$$

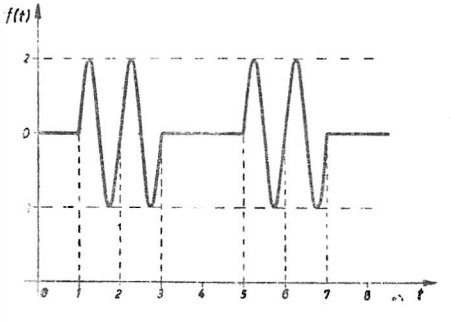
végtelen sorral adható meg, ahol minden tag — zérusnál kisebb argumentumokra — zérusnak veendő [azaz pl. a k-adik tag $(-1)^{k-1}\cdot 2\sin\omega\,(t-2k+1)\cdot 1(t-2k+1)$ módon értendő]. Függvényünk $\mathfrak{L}$-transzformáltja — a γ) I° (10b) formula és a geometriai sor összegképlete felhasználásával —

$$F(p) = \frac{2\omega}{p^2+\omega^2}\left(e^{-p} - e^{-3p} + e^{-5p} - + \ldots\right) = \frac{2\,\omega\,e^{-p}}{p^2+\omega^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-e^{-2p})^k =$$

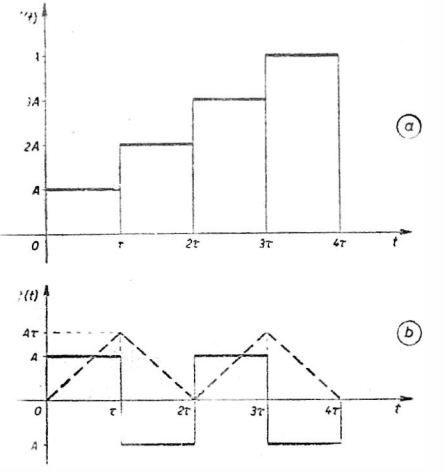
$$= \frac{2\,\omega\,e^{-p}}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{1+e^{-2p}} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{2}{e^{p}+e^{-p}} = \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)\,\mathrm{ch}\,p}\,,$$

ahol $\quad \mathrm{Re}\,p = \sigma > 0,$

s így $\quad |e^{-2p}| = e^{-2\sigma} < 1.$



7. ábra



8. ábra

11. Határozzuk meg a 8*a*, *b*. ábrán feltüntetett lépcsős függvények $\mathfrak{L}$-transzformáltját.

Megoldás. A γ) I° (10b) alatti eltolási tétel alkalmazandó. Felhasználandó továbbá a geometriai sor összegképlete.

A) $\quad f(t) = A[1(t) + 1(t-\tau) + 1(t-2\tau) + \ldots],$

$$F(p) = A\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p}e^{-p\tau} + \frac{1}{p}e^{-2p\tau} + \ldots\right) = \frac{A}{p}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-p\tau})^k = \frac{A}{p}\,\frac{1}{1-e^{-p\tau}} =$$

$$= \frac{A}{2p}\,\frac{\left(e^{\frac{p\tau}{2}} - e^{-\frac{p\tau}{2}}\right) + \left(e^{\frac{p\tau}{2}} + e^{-\frac{p\tau}{2}}\right)}{e^{\frac{p\tau}{2}} - e^{-\frac{p\tau}{2}}} = \frac{A}{2p}\left(1 + \mathrm{ctg}\,\frac{p\tau}{2}\right),$$

ahol $\mathrm{Re}\,p = \sigma > 0$, s így $|e^{-p\tau}| = e^{-\sigma\tau} < 1.$

B) $f(t) = A[1(t) - 2 \cdot 1(t-\tau) + 2 \cdot 1(t-2\tau) - + \ldots]$,

$$F(p) = A\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p}e^{-p\tau} + \frac{2}{p}e^{-2p\tau} - + \ldots\right) = \frac{A}{p}\left[1 - 2e^{-p\tau}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-p\tau})^k\right] =$$

$$= \frac{A}{p}\left(1 - \frac{2e^{-p\tau}}{1+e^{-p\tau}}\right) = \frac{A}{p}\,\frac{e^{-p\tau}}{1+e^{-p\tau}} = \frac{A}{p}\,\frac{e^{\frac{p\tau}{2}} - e^{-\frac{p\tau}{2}}}{e^{\frac{p\tau}{2}} + e^{-\frac{p\tau}{2}}} = \frac{A}{p}\,\mathrm{th}\,\frac{p\tau}{2},$$

ahol szintén $\mathrm{Re}\,p > 0$, s így $|e^{-p\tau}| < 1$;

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau, \qquad G(p) = \frac{F(p)}{p} = \frac{A}{p^2}\,\mathrm{th}\,\frac{p\tau}{2},$$

ahol felhasználtuk a β) II° (7a) formulát.

12. Állapítsuk meg az alábbi eredeti függvények e^{qt}-szeresének $\mathfrak{L}$-transzformáltját:

A) $f(t) = t^n$, B) $f(t) = \sin \omega t$, C) $f(t) = \mathrm{ch}\,\lambda t$.

Megoldás. A γ) II° (11′) formulát alkalmazzuk.

A) $\mathfrak{L}[t^n e^{qt}] = \dfrac{n!}{(p-q)^{n+1}}$, B) $\mathfrak{L}[e^{qt}\sin\omega t] = \dfrac{\omega}{(p-q)^2+\omega^2}$,

C) $\mathfrak{L}[e^{qt}\,\mathrm{ch}\,\lambda t] = \dfrac{p-q}{(p-q)^2-\omega^2}$.

13. Vezessük le az alábbi néhány speciális függvény (illetve velük kapcsolatos alkalmas függvények) $\mathfrak{L}$-transzformáltját:

A) $\mathrm{Ci}\,t = -\int_t^{\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$, B) $\mathrm{li}\,t = \int_0^t \frac{du}{\ln u}$, C) $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u}\,du$,

D) $C(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \cos(u^2)\,du$, $S(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \sin(u^2)\,du$.

Megoldás. Felhasználjuk az $\mathfrak{L}$-transzformáció definícióját és egyes ismert tételeit, eredményeit. Előfordul majd az integrálás sorrendjének felcserélése, az integráljel alatti határátmenet és differenciálás.

A) Legyen p egyelőre valós, pozitív szám. Akkor függvényünk, az ún. integrálkoszinusz $\mathfrak{L}$-transzformáltja így alakul:

$$\mathfrak{L}[\mathrm{Ci}\,t] = -\int_0^{\infty}\left[\int_t^{\infty}\frac{\cos u}{u}\,du\right]e^{-pt}\,dt = -\int_0^{\infty}\left[\int_0^u e^{-pt}\,dt\right]\frac{\cos u}{u}\,du =$$

$$= -\frac{1}{p}\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-pu}}{u}\cos u\,du = -\frac{1}{p}\,g(p).$$

Könnyen belátható, hogy

$$\lim_{p\to+0} g(p) = 0 \qquad \text{és} \qquad g'(p) = \int_0^\infty e^{-pu}\cos u\,du = \frac{p}{1+p^2}\,.$$

Következésképpen $g(p) = \frac{1}{2}\ln(1+p^2) + C$, ahol $C = 0$, tekintettel az előbbi határértékre. Végeredményben tehát

$$\mathfrak{L}[\mathrm{Ci}\,t] = -\frac{1}{2}\ln(1+p^2) = \frac{1}{2p}\ln\frac{1}{1+p^2}\,.$$

E valós p-re levezetett eredmény nyilván komplex p-re is érvényben marad.

B) Függvényünk $t > 1$ esetén főértékével, vagyis

$$\mathrm{li}\,t = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_0^{1-\varepsilon}\frac{du}{\ln u} + \int_{1+\varepsilon}^{t}\frac{du}{\ln u}\right]$$

módon veendő figyelembe.

Tekintsük most az

$$f(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du \qquad (t > 0)$$

függvényt; ez — az $u = -\ln v$, $v = e^{-u}$ helyettesítéssel —

$$f(t) = -\int_0^{e^{-t}} \frac{dv}{\ln v} = -\,\mathrm{li}\,e^{-t}$$

alakot ölt. E függvény $\mathfrak{L}$-transzformáltja — a p-t egyelőre valósnak és pozitívnak véve — így alakul:

$$\mathfrak{L}[f(t)] = \int_0^\infty\left[\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du\right]e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty\left[\int_0^u e^{-pt}\,dt\right]\frac{e^{-u}}{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{1-e^{-pu}}{u}\,e^{-u}\,du = \frac{1}{p}\,g(p).$$

Könnyen belátható, hogy

$$\lim_{p\to+0} g(p) = 0 \qquad \text{és} \qquad g'(p) = \int_0^\infty e^{-pu}\,e^{-u}\,du = \frac{1}{1+p}\,.$$

Következésképpen $g(p) = \ln(1+p) + C$, ahol $C = 0$. Végeredményben tehát

$$-\,\mathfrak{L}[f(t)] = \mathfrak{L}[\mathrm{li}\,e^{-t}] = -\frac{1}{p}\ln(1+p) = \frac{1}{p}\ln\frac{1}{1+p}\,.$$

C) Függvényünk az ún. hibaintegrál. Vezessük be most az $f(t) = e^t \Phi(\sqrt{t})$ függvényt [mely az $1(t)$-vel megszorozva értendő]. Nyilvánvalóan

$$f'(t) = e^t \Phi(\sqrt{t}) + e^t \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = f(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \quad \text{és} \quad f(0) = 0.$$

Ily módon írható, hogy*

$$\mathfrak{L}[f'(t)] = p F(p) = F(p) + \mathfrak{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right] = F(p) + \frac{1}{\sqrt{p}}, \qquad \mathrm{Re}\,\sqrt{p} > 0.$$

Végeredményben tehát

$$\mathfrak{L}[e^t \Phi(\sqrt{t})] = F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}\,(p-1)}.$$

D) A fentiekhez hasonlóan vizsgálandók az [$1(t)$-vel szorzandó]

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\cos(t-\tau)}{\sqrt{\tau}}\, d\tau = \cos t \cdot C(\sqrt{t}) + \sin t \cdot S(\sqrt{t}),$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\sin(t-\tau)}{\sqrt{\tau}}\, d\tau = \sin t \cdot C(\sqrt{t}) - \cos t \cdot S(\sqrt{t})$$

függvények. Eredményül azt kapjuk, hogy

$$\mathfrak{L}[f(t)] = \frac{\sqrt{p}}{p^2+1}, \qquad \mathfrak{L}[g(t)] = \frac{1}{\sqrt{p}\,(p^2+1)}.$$

δ) Eredeti, ill. transzformált függvények szorzása

I°. Transzformált függvények szorzása. Legyen adva két $\mathfrak{L}$-transzformált függvény, $F(p)$ és $G(p)$. Kérdés, az eredeti függvények, $f(t)$ és $g(t)$ milyen kifejezésének transzformáltja az $F(p)$, $G(p)$ szorzat.

A γ) I°-ben tanultak felhasználásával írható, hogy

$$F(p)\,G(p) = G(p) \int_0^\infty f(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau = \int_0^\infty f(\tau)\,[e^{-p\tau}\, G(p)]\, d\tau =$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)\, d\tau \int_\tau^\infty g(t-\tau)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty f(\tau)\, d\tau \int_0^\infty g(t-\tau)\, 1(t-\tau)\, e^{-pt}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt}\, dt \int_0^\infty f(\tau)\, g(t-\tau)\, 1(t-\tau)\, d\tau = \int_0^\infty \Big[\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\Big] e^{-pt}\, dt,$$

mert a $\mathrm{Re}\, p > \sigma_1$ félsíkon [σ_1 itt az $f(t)$ és $g(t)$ emelkedési együtthatóinak nagyobbika] kettős integrálunk abszolút konvergens, s így az integrálás sorrendje felcserélhető

* Vö. a *d) ζ) I°* ponttal!

volt. A [ ]-beli integrál valóban eredeti függvény, mert az 1′ és 2′ feltétel nyilvánvalóan, a 3′ pedig

$$\left| \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \right| \leqq M \int_0^t e^{\sigma_1 \tau} \cdot e^{\sigma_1 (t-\tau)}\, d\tau = M\, t\, e^{\sigma_1 t} < K\, e^{(\sigma_1 + \varepsilon)t}$$

módon teljesül rajta. Végeredményben:

$$F(p)\, G(p) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \right]. \tag{12′}$$

A jobboldali [ ]-beli integrált *az $f(t)$ és $g(t)$ konvolúciójának** nevezik, és $f(t) * g(t)$ módon jelölik. Az E. Borel-től származó (12′) ***tétel*** tehát így fogalmazható meg: *Két $\mathcal{L}$-transzformált függvény szorzata maga is $\mathcal{L}$-transzformált, mégpedig a két eredeti függvény konvolúciójának $\mathcal{L}$-transzformáltja.*

A (12′) *következmény*eként, az $f(t) * g(t)$ konvolúció deriváltjának $\mathcal{L}$-transzformáltja

$$D(p) = p\, F(p)\, G(p) = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \right] = \mathcal{L}\,[d(t)] \tag{13a′}$$

alakot, vagy — a t felső határú és t paraméteres integrál t szerinti differenciálását végrehajtva** —

$$D(p) = p\, F(p)\, G(p) = \mathcal{L}\left[f(t)\, g(0) + \int_0^t f(\tau)\, g_t'(t-\tau)\, d\tau \right] = \mathcal{L}\,[d(t)] \tag{13b′}$$

alakot ölt. Ez utóbbi Duhamel ***formulája***, amely még más alakokban is előállítható, pl. parciális integrálással. E formula bővebb értelmezésére még visszatérünk.

A fentebbi formulák $\mathcal{C}$-transzformációs megfelelői a következők:

$$\frac{1}{p}\, \varphi(p)\, \gamma(p) = \mathcal{C}\left[\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \right], \tag{12″}$$

$$\delta(p) = \varphi(p)\, \gamma(p) = \mathcal{C}\left[\frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \right] = \mathcal{C}\,[d(t)], \tag{13a″}$$

$$\delta(p) = \varphi(p)\, \gamma(p) = \mathcal{C}\left[f(t)\, g(0) + \int_0^t f(\tau)\, g_t'(t-\tau)\, d\tau \right] = \mathcal{C}\,[d(t)]. \tag{13b‴}$$

Szóljunk most néhány szót az

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \tag{14a}$$

* Németül: *Faltung*, oroszul: *свёртывание*, magyarul: *összehajtás*.
** L. pl. sorozatunk A. V** kötetében.

konvolúció *tulajdonságairól*. A (12')-ből nyilvánvaló, hogy a tényezők szerepe felcserélhető, azaz

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t). \tag{14b}$$

A három tényezős konvolúció

$$[f(t) * g(t)] * k(t) = \int_0^t k(t-\tau)\, d\tau \int_0^t f(\tau_1)\, g(\tau - \tau_1)\, d\tau_1 \tag{14c}$$

módon értelmezhető. Könnyen belátható, hogy érvényes rá a kommutatív és asszociatív törvény, azaz

$$[f(t) * g(t)] * k(t) = [g(t) * k(t)] * f(t) = [k(t) * f(t)] * g(t). \tag{14d}$$

Végül — tárgyalás nélkül — megemlítjük a (12')-ben megformulázott tétel A. M. Efrosz-tól származó általánosítását.

Tétel. *Ha* $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$, *továbbá a* $G(p)$ *és* $q(p)$ *reguláris függvénnyel képzett* $G(p)\, e^{-\tau q(p)} = \mathfrak{L}[g(t;\tau)]$, *akkor*

$$\boxed{F[q(p)]\, G(p) = \mathfrak{L}\left[\int_0^\infty f(\tau)\, g(t;\tau)\, d\tau\right].} \tag{15}$$

Ha speciálisan, $q(p) = p$, akkor $G(p)\, e^{-\tau p} = \mathfrak{L}\, g(t-\tau)]$, azaz $g(t;\tau) = g(t-\tau)$, tehát a (15) a (12')-re egyszerűsödik.

II°. Eredeti függvények szorzása. Legyen adva két eredeti függvény, $f(t)$ és $g(t)$. Kérdés, a transzformált függvények, $F(p)$ és $G(p)$ milyen kifejezésének eredetije az $f(t)\, g(t)$ szorzat.

A *c) β)* (11) inverziós formula felhasználásával írhatjuk, hogy

$$f(t)\, g(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\int_0^\infty f(t)\, g(t)\, e^{-pt}\, dt\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty g(t)\, e^{-pt}\, dt \int_{\sigma_* - i\infty}^{\sigma_* + i\infty} F(q)\, e^{qt}\, dq\right] =$$

$$= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_* - i\infty}^{\sigma_* i + \infty} F(q)\, dq \int_0^\infty g(t)\, e^{-(p-q)t}\, dt\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_* - i\infty}^{\sigma_* + i\infty} F(q)\, G(p-q)\, dq\right],$$

ahol $\sigma_* = \mathrm{Re}\, q > \sigma_{1f}$, $\sigma = \mathrm{Re}\, p > \sigma_{1g} + \sigma_*$ s így $\sigma - \sigma_* = \mathrm{Re}\,(p-q) > \sigma_{1g}$, továbbá a kettős integrál abszolút konvergenciája miatt az integrálás sorrendje felcserélhető volt. Végeredményben:

$$\boxed{f(t)\, g(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_* - i\infty}^{\sigma_* + i\infty} F(q)\, G(p-q)\, dq\right].} \tag{16'}$$

E ***tétel*** így fogalmazható meg: *Két eredeti függvény szorzata szintén eredeti, mégpedig a* $[\,]$*-beli* p *paraméteres integrál* $\mathfrak{L}^{-1}$ *inverz-transzformáltja.*

A megfelelő $\mathcal{C}$-transzformációs formula nyilván így alakul:

$$f(t)\,g(t) = \mathcal{C}^{-1}\left[\frac{p}{2\pi i}\int_{\sigma_*-i\infty}^{\sigma_*+\infty}\frac{\varphi(q)}{q}\,\frac{\gamma(p-q)}{p-q}\,dq\right]. \tag{16''}$$

e) **Az első és második kifejtési tétel**

I°. Az első kifejtési tétel. 1'. Tegyük fel, hogy az $F(p)$ transzformált függvény reguláris a végtelen távoli pontban [ui. *a) β)* (10) szerint $\mathrm{Re}\,p \to +\infty$ esetén $F(p) \to 0$]. Ekkor — mint ismeretes — függvényünk a $p = \infty$ pont környezetében

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k} \tag{17a}$$

alakú LAURENT-sorba fejthető. Ez valamely $|p| > R$ körgyűrűben konvergens s bármely $|p| \geqq R' > R$ körgyűrűben abszolút konvergens, s együtthatói az

$$|c_k| < M R'^k$$

CAUCHY-féle egyenlőtlenségnek tesznek eleget.

A $\mathcal{L}[t^k] = k!/p^{k+1}$ transzformációs formula figyelembevételével a szóban forgó $F(p)$-nek formálisan az [$1(t)$ egységugrással szorzandó]

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}\,t^{k-1} \tag{17b}$$

eredeti függvény felel meg. Minthogy e sor általános tagja abszolút értékben kisebb mint a minden t-re konvergens

$$M R'\,e^{R'|t|} = M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R'^k}{(k-1)!}\,|t|^{k-1}$$

soré, ezért sorunk szintén minden t-re konvergens, tehát egész függvény, pozitív t-kre pedig $|f(t)| < M R'\,e^{R't}$. Ily módon $f(t)\,1(t)$ valóban eredeti függvény; sorának egyenletes konvergenciája miatt, e^{-pt}-vel szorozva, 0-tól ∞-ig integrálható, azaz transzformálható, és transzformáltként éppen a (17a) LAURENT-sor adódik.

A fentiek alapján kimondható az ***első kifejtési tétel:*** *Ha az $F(p)$ $\mathcal{L}$-transzformált függvény reguláris a $p = \infty$ pontban, azaz e pont környezetére érvényes* LAURENT-*sora a* (17a) *szerint alakul, akkor $f(t)$ eredetiként az [$1(t)$-vel szorzandó]* (17b) *függvény szolgál, amely egyébként egész függvény.* Végeredményben:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}\,t^{k-1}.} \tag{17c'}$$

A megfelelő $\mathcal{C}$-transzformációs formula — a $\mathcal{C}[t^k] = k!/p^k$-ra való tekintettel —

$$\mathcal{C}^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k!}\,t^k \tag{17c''}$$

alakú. Ezt — még a $p = d/dt$ operátorfogalomra támaszkodva — HEAVISIDE közölte először.

2'. Megjegyzendő, hogy *a fentebbi tétel megfordítható.* Nevezetesen, ha az eredeti függvény $f(t)\,1(t)$ alakú, ahol $f(t)$ az $|f(t)| < M\,e^{\sigma_1 |t|}$ egyenlőtlenségnek eleget tevő egész függvény, akkor az $F(p)$ transzformált függvény a $p = \infty$ pontban reguláris.

II°. A második kifejtési tétel. 1'. Legyen a $zF(p)$ $\mathfrak{L}$-transzformált racionális valódi törtfüggvény, vagyis

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + \ldots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + \ldots + b_n p^n}, \qquad m < n. \tag{18a}$$

Legyenek továbbá az $N(p)$ nevező p_k zérushelyei [vagy ami ugyanaz, az $F(p)$ tört pólusai] egyszeresek, azaz

$$N(p_k) = 0, \qquad \text{de} \qquad N'(p_k) \neq 0. \tag{18b}$$

Ekkor — mint ismeretes — törtfüggvényünk előállítható

$$\frac{M(p)}{N(p)} = \frac{c_1}{p - p_1} + \frac{c_2}{p - p_2} + \ldots + \frac{c_n}{p - p_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{c}{p - p_k}$$

részlettörtes alakban. Az ismeretlen együtthatók

$$\lim_{p \to p_l} (p - p_l) \frac{M(p)}{N(p)} = \lim_{p \to p_l} \frac{M(p)}{\dfrac{N(p) - N(p_l)}{p - p_l}} = \frac{M(p_l)}{N'(p_l)} =$$

$$= \lim_{p \to p_l} (p - p_l) \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{p - p_k} = c_l$$

módon határozhatók meg, és velük $F(p)$ végleges részlettörtes alakja így írható:

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} \frac{1}{p - p_k}.$$

Utoljára az $\mathfrak{L}$-transzformáció lineáritását és az $\mathfrak{L}[e^{p_k t}] = (p - p_k)^{-1}$ transzformációs formulát felhasználva, az

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t} \tag{18c}$$

eredeti függvényt kapjuk.

Ezek alapján kimondható a ***második kifejtési tétel:*** *Ha az $\mathfrak{L}$-transzformált csupa egyszeres pólusokkal rendelkező racionális valódi törtfüggvény, a* (18a, b) *szerint, akkor az eredeti függvényt a* (18c) *szolgáltatja.* Végeredményben:

$$\boxed{\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{M(p)}{N(p)}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t}.} \tag{18d'}$$

2'. *Ha speciálisan,* $p_1 = 0$, vagyis a nevező

$$N(p) = p\,L(p) = p(c_0 + c_1\,p + \ldots + c_{n-1}\,p^{n-1}) \tag{18e}$$

alakú, a (18a, b) feltételek változatlan fennállása mellett, akkor — az

$$N'(p) = L(p) + p\,L'(p),\quad N'(0) = L(0)$$

körülmény figyelembevételével — *a* (18d') *formula az alábbi célszerűbb alakba írható át:*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{M(p)}{p\,L(p)}\right] = \frac{M(0)}{L(0)} + \sum_{k=2}^{n} \frac{M(p_k)}{p_k\,L'(p_k)}\,e^{p_k t}. \tag{18f'}$$

A (18d') és (18f') formulák $\mathcal{L}$-transzformációs megfelelői — a $\varphi(p) = p\,F(p)$ és $\mathcal{L}[e^{p_k t}] = p(p - p_k)^{-1}$ összefüggésre való tekintettel —

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p\,M(p)}{N(p)}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{M(p_k)}{N'(p_k)}\,e^{p_k t}, \tag{18d''}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{M(p)}{L(p)}\right] = \frac{M(0)}{L(0)} + \sum_{k=2}^{n} \frac{M(p)_k}{p_k\,L'(p_k)}\,e^{p_k t} \tag{18f''}$$

módon alakulnak. E formulát — még a $p = d/dt$ operátorfogalomra támaszkodva — HEAVISIDE használta először.

3'. Ha a nevezőben levő $N(p) = b_0 + b_1\,p + \ldots + b_n\,p^n$ polinom együtthatói valósak, akkor a komplex zérushelyek konjugáltjukkal együtt lépnek fel, lévén

$$N(p) = 0 \quad \text{esetén} \quad N(\bar{p}) = \overline{N(p)} = 0. \tag{19a}$$

Ha ezenkívül még a (számlálóban levő) $M(p)$ polinom együtthatói is valósak, akkor

$$\frac{M(p)}{N'(p)}\,e^{pt} = \overline{\frac{M(p)}{N'(p)}\,e^{pt}}, \tag{19b}$$

következésképpen

$$\frac{M(p_k)}{N'(p_k)}\,e^{p_k t} + \frac{M(\bar{p}_k)}{N'(\bar{p}_k)}\,e^{\bar{p}_k t} = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{M(p_k)}{N'(p_k)}\,e^{p_k t}.$$

Eszerint *ha* $M(p)$ *és* $N(p)$ *valós együtthatójú, akkor a* (18') *helyett célszerűen a*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{M(p)}{N(p)}\right] = \sum \frac{M(p_k)}{N'(p_k)}\,e^{p_k t} + 2\,\mathrm{Re}\sum \frac{M(p_k)}{N'(p_k)}\,e^{p_k t} \tag{19c}$$

formula használandó, ahol az első összeg az $N(p)$ valós gyökeire, a második pedig (pozitív képzetes részű) komplex gyökeire vonatkozik.

4'. A $p_k = \sigma_k + i\,\tau_k$ komplex gyökkel kapcsolatos

$$\frac{M(p_k)}{N'(p_k)}\,e^{p_k t} = \frac{M(p_k)}{N'(p_k)}\,e^{\sigma_k t}(\cos\tau_k\,t + i\sin\tau_k\,t)$$

kifejezés — mint ismeretes — bizonyos *rezgést* ír le, előnyös komplex alakban.* Nevezetesen aperiodikus mozgást, ha $\tau_k = 0$; csillapodó rezgést, ha $\tau_k \neq 0$, és $\sigma_k < 0$; harmonikus rezgést, ha $\tau_k \neq 0$ de $\sigma_k = 0$; instabil (korlátlanul növekvő amplitudójú) rezgést (mozgást), ha $\sigma_k > 0$. Stabil rendszer ($\sigma_k \leqq 0$) esetén az aperiodikus és a csillapodó tagok idővel ($t \to \infty$) exponenciálisan elenyésznek, s az állandósult állapotban már csak a harmonikus tagok érvényesülnek.

Ezek szerint *a tranziens állapotban a* (19c) *és* $\sigma_k \leqq 0$ *által leírt stabil rendszer állandósult rezgései*

$$f(t) = 2\,\mathrm{Re} \sum \frac{M(i\,\tau_k)}{N'(i\,\tau_k)}\, e^{i\tau_k t} \tag{19d}$$

módon alakulnak, ahol a szumma a $p_k = i\,\tau_k$, $\tau_k > 0$ gyökökre vonatkozik.

III°. A 2. kifejtési tétel általánosításai. 1'. E kifejtési tétel könnyen általánosítható tetszőleges ν_k-ad rendű p_k pólusokkal rendelkező $F(p) = M(p)/N(p)$, $m < n$ racionális valódi törtfüggvényekre ($k = 1, 2, \ldots, n'$; $\sum_{k=1}^{n'} \nu_k = n$).

Induljunk ki az ismert

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\,i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp \tag{20a}$$

inverziós formulából, ahol most $a > \mathrm{Re}\, p_k$. Minthogy $m < n$ miatt $F(p) \to 0$, midőn $p \to \infty$, azért JORDAN lemmája szerint a $C_R : |p| = R$, $\mathrm{Re}\, p < a$ körívdarab mentén

$$\lim_{R\to\infty} \int_{(C_R)} F(p)\, e^{pt}\, dp = \int_{(C_\infty)} F(p)\, e^{pt}\, dp = 0. \tag{20b}$$

Ily módon a (20a) alatti $\mathrm{Re}\, p = a$ egyenes (L_a) menti integrál a $G_R = L_a + C_\infty$ zárt görbe mentén vett integrállal helyettesíthető, azaz

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_{(G_R)} F(p)\, e^{pt}\, dp. \tag{20c}$$

CAUCHY reziduum-tétele értelmében

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_{(G_R)} F(p)\, e^{pt}\, dp = \sum_{k=1}^{n'} \operatorname*{res}_{p=p_k} [F(p)\, e^{pt}], \tag{20d}$$

ahol a ν_k-ad rendű p_k pólus reziduuma**

$$\operatorname*{res}_{p=p_k}^{(\nu_k)} [F(p)\, e^{pt}] = \frac{1}{(\nu_k - 1)!} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{\nu_k-1}}{dp^{\nu_k-1}} [(p - p_k)^{\nu_k} F(p)\, e^{pt}]. \tag{20e}$$

* L. bővebben pl. sorozatunk B. IV. kötetében!
** L. pl. *Fazekas* [9].

Végeredményben *a második kifejtési tétel általánosított alakja* a következő:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n'} \frac{1}{(\nu_k - 1)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{\nu_k - 1}}{dp^{\nu_k - 1}} \left[(p - p_k)^{\nu_k} F(p)\, e^{pt} \right]. \tag{20f}$$

2′. A második kifejtési tétel — bizonyos kiegészítő feltevések mellett — általánosítható tetszőleges $M(p)$ és $N(p)$ egész függvények hányadosaként előállított $F(p)$ *meromorf függvényekre* is.* (Ilyen függvények pl. a polinomok, az $e^{\lambda p}$, $\operatorname{ch} \lambda p$, $\operatorname{sh} \lambda p$, $\cos \lambda p$, $\sin \lambda p$ stb. hányadosai.)

Tétel. *Az $F(p) = M(p)/N(p)$ meromorf függvényről tegyük fel a következőket: a) csupán elsőrendű p_k pólusokkal rendelkezik, s ezek a $\operatorname{Re} p \leqq \sigma_1$ félsíkon helyezkednek el; b) létezik olyan C_n: $|p| = R_n$, $R_1 < R_2 < \ldots < R_n \to \infty$ körsorozat, amelyen $F(p) \to 0$, mégpedig* arc *p-re nézve egyenletesen; c) tetszőleges $a > \sigma_1$ esetén az* $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, dp$ *integrál abszolút konvergens.*

E feltételek mellett $F(p)$ az

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t} \tag{20g}$$

eredeti függvény $\mathfrak{L}$-transzformáltja.

A bizonyítás — a fentebbiekhez hasonlóan — az inverziós integrálra, JORDAN lemmája és CAUCHY reziduum-elméletére támaszkodik.

ζ) Különleges függvények-transzformálása

I°. Tört kitevőjű hatványok transzformálása. A Γ függvény EULER-féle definíciója szerint

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{\infty} t^a e^{-t}\, dt \qquad (a > -1). \tag{21a}$$

Vezessük be t helyébe a $q = t/p$ változót, ahol $p = re^{i\alpha}$, $|\alpha| < \pi/2$; ekkor

$$\Gamma(a+1) = p^{a+1} \int_{(L_\alpha)} q^a e^{-qp}\, dq, \tag{21b}$$

ahol $L_\alpha : q = t\, e^{-i\alpha}/r = \varrho\, e^{-i\alpha}$, $0 < \varrho < \infty$ (sugár).

Integráljuk most a $q^a e^{-pq}$ függvényt a $C_R : q = Re^{i\varphi}$, $-\alpha < \varphi < 0$ körívdarab mentén; ekkor

$$\left| \int_{(C_R)} q^a e^{-pq}\, dq \right| \leqq R^{a+1} \left| \int_{-\alpha}^{0} e^{-rR\cos(\alpha+\varphi)}\, d\varphi \right| < \frac{R^{a+1}\,\alpha}{e^{-rR\cos\alpha}},$$

következésképpen

$$\lim_{R\to\infty} \int_{(C_R)} q^a e^{-pq}\, dq = \int_{(C_\infty)} q^a e^{-pq}\, dq = 0. \tag{21c}$$

* Az egész (holomorf) és tört (meromorf) függvény fogalmát l. a 2. §. a) helyen.

Minthogy a $q^a e^{-pq}$ függvénynek a $-\alpha < \arg q < 0$ szektorban nincs szinguláris pontja, továbbá a pozitív valós féltengelyen $q = \varrho e^0 = \varrho$, azért

$$\int_{(L_a)} q^a e^{-pq}\,dq + \int_{(C_R)} q^a e^{-pq}\,dq + \int_{\infty}^{0} \varrho^a e^{-p\varrho}\,d\varrho = 0,$$

tehát — a (21b) figyelembevételével és $\varrho \to t$ betűcserével —

$$\int_0^{\infty} t^a e^{-pt}\,dt = \int_{(L_a)} q^a e^{-pq}\,dq = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}. \tag{21d}$$

Ha $a \geqq 0$, akkor $f(t) = t^a$ [az $1(t)$ egységugrással szorozva eredeti függvény, és transzformáltja — a (21d) szerint —

$$\boxed{\mathfrak{L}[t^a] = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}.} \tag{21e}$$

E formula a korábban pozitív egész n-ekre nyert $\mathfrak{L}[t^n = n!/p^{n+1}$ formulát általánosítja tetszőleges pozitív a-kra [$a = n$ esetén $\Gamma(a+1) = n!$].

Ha $0 > a > -1$, akkor $t \to 0$ esetén t^a korlátlanul nő, s így nem teljesíti az eredeti függvénnyel szemben támasztott feltételeket. A (21d) integrál azonban ilyen a-kra is konvergens, s így a (21e) formula is érvényes marad. Ezért azt lehet mondani, hogy $0 > a > -1$ esetén t^a „szinguláris" eredeti, $\Gamma(a+1)/p^{a+1}$ pedig „szinguláris" transzformált függvény.

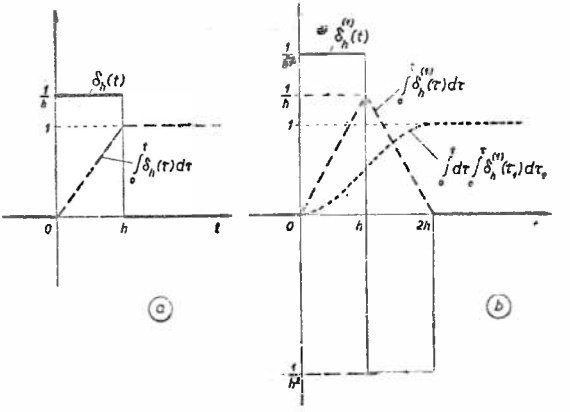
Speciálisan, $a = -1/2$ esetén

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$$

(a POISSON-integrál* értékét felhasználva), tehát

$$\mathfrak{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right] = \frac{1}{\sqrt{p}}. \tag{21f}$$

II°. Impulzusfüggvények transzformálása. 1'. Ha az $F(p) = 1/\sqrt{p}$ függvény már „szinguláris" transzformált, akkor az $F(p) = 1$, p, p^2 ... függvények, amelyek a $\lim_{p\to\infty} F(p) = 0$ tulajdonsággal sem rendelkeznek, méginkább csak feltételesen tekinthetők transzformált függvényeknek. E feltételes transzformáltakat és eredetijüket, az ún. impulzusfüggvényeket DIRAC, a neves angol fizikus vezette be, és alkalmazta előnyösen olyan gyakorlati feladatoknál, amelyekben pillanatnyi lökés jellegű mennyiségek szerepelnek.



9. ábra

Tekintsük a 9*a*. ábrán feltüntetett

$$\delta_h(t) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{ha } t < 0, \text{ vagy } t > h, \\ 1/h, & \text{ha } 0 < t < h \end{array}\right\} = \frac{1(t) - 1(t-h)}{h} \tag{22a}$$

* L. pl. sorozatunk A. V.* kötetében.

függvényt. Az ilyen impulzus összhatása egységnyi, lévén

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t)\,dt = \int_{0}^{h} \frac{dt}{h} = 1. \tag{22b}$$

Ha $h \to 0$, akkor a $\delta_h(t)$ függvénycsalád divergál ugyan, de feltételesen mégis bevezetjük a $\delta(t)$ függvényt, mint a $\delta_h(t)$ függvénycsalád határfüggvényét, azaz

$$\delta(t) = \lim_{h\to 0} \delta_h(t); \tag{23a}$$

e $\delta(t)$-t *nulladrendű impulzusfüggvény*nek vagy *deltafüggvény*nek nevezik. Függvényünk minden $t \neq 0$-nél zérus, $t = 0$-nál pedig ∞, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t)\,dt = 1. \tag{23b}$$

Ily módon a $\delta(t)$ olyan, teljesen meghatározott határfolyamat rövid, feltételes megjelölésére szolgál, amilyen a fizikában gyakran képezi vizsgálat tárgyát, nevezetesen: *végtelen kis időközben fellépő végtelen nagy mennyiség egységnyi összhatással.* E függvény bevezetése lényegesen egyszerűsíti az ilyen határfolyamattal kapcsolatos számítást, mégpedig: ahelyett, hogy elvégeznők a részletszámításokat egészen a határátmenetig, s erre csak a végeredményben térnénk rá, közvetlenül, még a részletszámítások előtt áttérünk a határátmenetre. A fizikai feladatok zömében az ilyen felcserélés teljesen megengedett.

2′. Megállapodásszerűen *a* $\delta(t)$ *függvény transzformáltját* mint a $\delta_h(t) = [1(t) - 1(t-h)]/h$ függvény transzformáltjának határértékét állítjuk elő; minthogy — a *d) γ)* I° értelmében —

$$\mathfrak{L}[\delta_h(t)] = \frac{1 - e^{-hp}}{hp}, \quad \text{így} \quad \mathfrak{L}[\delta(t)] = \lim_{h\to 0} \frac{1 - e^{ph}}{hp} = 1, \tag{23c′}$$

egyelőre feltételesen. Eredményünket még az alábbi megfontolások is alátámasztják. A 9*a*. ábrán pontozva rajzolt görbe a $\delta_h(t)$ függvény integrálját, vagyis az

$$1_h(t) = \int_{0}^{t} \delta_h(t)\,dt$$

függvényt ábrázolja. Látható, hogy $h \to 0$ esetén $1_h(t) \to 1(t)$ (egységugrás), következésképpen

$$\int_{0}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = 1(t), \quad \text{azaz} \quad \delta(t) = 1'(t). \tag{23d}$$

Mivel $\mathfrak{L}[1(t)] = 1/p$, azért — a *d) β)* I° értelmében —

$$\mathfrak{L}[\delta(t)] = \mathfrak{L}[1'(t)] = p \cdot \frac{1}{p} = 1, \tag{23c″}$$

megegyezésben a (23c′)-vel.

Továbbá, bármely, a *c) α)* I° 1′ feltételnek eleget tevő $\varphi(t)$ függvényre igaz — az integrálszámítás középérték-tétele alapján —, hogy

$$\int_{0}^{\infty} \varphi(t)\,\delta_h(t)\,dt = \frac{1}{h}\int_{0}^{h} \varphi(t)\,dt = \varphi(t^*), \qquad 0 < t^* < h.$$

Ebből $h \to 0$ határátmenetnél az

$$\int_0^\infty \varphi(t)\,\delta(t)\,dt = \varphi(0) \tag{23e}$$

formula adódik; ha $t = 0$ a $\varphi(t)$ szakadási helye, akkor $\varphi(0)$ helyett a jobb oldali határérték veendő. Ennek megfelelően újból azt kapjuk, hogy

$$\mathfrak{L}[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t)\,e^{-pt}\,dt = e^0 = 1. \tag{23c'''}$$

3'. *A deltafüggvényre is kiterjeszthetők az operátorszámítás szabályai*; pl. a *d) γ)* 10b) alatti eltolási szabály és a (23e) szerint

$$\mathfrak{L}[\delta(t-\tau)] = e^{-p\tau}\,\mathfrak{L}[\delta(t)] = e^{-p\tau}, \tag{24a}$$

d) δ) (12') alatti szorzási szabály és a (23e) szerint pedig

$$1 \cdot F(p) = \mathfrak{L}\Big[\int_0^t f(t-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau\Big] = \mathfrak{L}[f(t)] \tag{24b}$$

4'. A $\delta(t)$-hez hasonlóan értelmezhetők a magasabbrendű impulzusfüggvények. Tekintsük pl. a 9b. ábrán feltüntetett

$$\delta_h^{(1)}(t) = \frac{1}{h^2}[1(t) - 2\cdot 1(t-h) + 1(t-2h)] \tag{25a}$$

függvényt; ebből $h \to 0$ határátmenettel nyerhető a

$$\delta_1(t) = \lim_{h\to 0} \delta_h^{(1)}(t) \tag{25b}$$

alakú, ún. *elsőrendű impulzusfüggvény*. Transzformáltja mint a $\delta_h^{(1)}(t)$ transzformáltjának határértéke nyerhető, azaz

$$\mathfrak{L}[\delta_1(t)] = \lim_{h\to 0} \mathfrak{L}[\delta_h^{(1)}(t)] = \lim_{h\to 0} \frac{1 - 2e^{-hp} + e^{-2ph}}{h^2 p} = \tag{25c'}$$

$$= \lim_{h\to 0} p\,\frac{\dfrac{1-e^{-hp}}{hp} - e^{-ph}\dfrac{1-e^{-hp}}{hp}}{hp} = p \lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-hp}}{hp} = p.$$

A $\delta_h^{(1)}$ függvénynek a 9b. ábrán pontozva rajzolt második integrálja

$$1_h^{(1)}(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\tau \delta_h^{(1)}(\tau_1)\,\delta\tau_1;$$

ez $h \to 0$ határátmenetnél — láthatóan — az egységugráshoz tart, azaz

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau \delta_1(\tau_1)\,\delta\tau_1 = 1(t), \quad \text{tehát} \quad \delta_1(t) = 1''(t). \tag{25d}$$

Ily módon — a (25c')-vel megegyezésben —

$$\mathfrak{L}[\delta_1(t)] = \mathfrak{L}[1''(t)] = p^2 \cdot \frac{1}{p} = p. \tag{25c''}$$

5'. Hasonló módon a p^n hatványnak megfelelő eredeti függvényt tekintjük az *n-ed rendű impulzusfüggvény*nek, mely egyben az egységugrás $n+1$-edik deriváltja, azaz

$$\delta_n(t) = \mathfrak{L}^{-1}[p^n] = \frac{d^{(n+1)}}{dt^{n+1}}\, 1(t). \tag{26}$$

III°. Az $\int_t^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau$ függvény transzformálása. 1'. Az α) II° (4') alatt megismert hasonlósági tétel

$$F(pT) = \int_0^\infty \frac{1}{T} f\left(\frac{t}{T}\right) e^{-pt}\, dt$$

alakban is írható. Integráljuk mindkét oldalt T szerint 0-tól 1-ig, a jobb oldalon feltételezve az integrálás sorrendjének felcserélhetőségét:

$$\int_0^1 F(pT)\, dT = \int_0^\infty e^{-pt}\, dt \int_0^1 f\left(\frac{t}{T}\right)\frac{dT}{T} = \mathfrak{L}\left[\int_0^1 f\left(\frac{t}{T}\right)\frac{dT}{T}\right].$$

Baloldalt $pT = q$, jobboldalt $t/T = \tau$ helyettesítéssel élve, azt kapjuk, hogy

$$\mathfrak{L}\left[\int_t^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau\right] = \frac{1}{p}\int_0^p F(q)\, dq. \tag{27a}$$

2'. Az eredeti és a transzformált függvény (β) II°-ben és IV°-ben tanult) integrálás szabálya szerint

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau\right] = \frac{1}{p}\int_p^\infty F(q)\, dq,$$

tehát a (27a) figyelembevételével

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau\right] = \frac{1}{p}\int_0^\infty F(q)\, dq.$$

Minthogy a bal oldali integrál eredménye valamely A állandó, és $\mathfrak{L}[A] = A/p$, következésképpen a jobb oldali integrál is A-val egyenlő, és végeredményben

$$\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau = \int_0^\infty F(q)\, dq. \tag{27b}$$

IV°. Törtkitevős hatványsor transzformálása. Az ε) I°-ben tanult első kifejtési tétel általánosított hatványsorra is kiterjeszthető. Itt csupán egy egyszerű esetre vonatkozó szabályt adunk meg, igazolás nélkül.

Szabály. Tegyük fel, hogy $F(p) \to 0$, *midőn* $p \to \infty$, $\mathrm{Re}\, p < a\ (> 0)$, *továbbá, hogy* $F(p)$*-nek nincs más szinguláris pontja a véges p síkon, csupán a* $p = 0$ *origo mint véges rendű elágazási pont. Ha ennek megfelelően* $F(p)$ *az*

$$F(p) = p^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, p^{k\beta} \tag{28a}$$

alakú általános hatványsorba fejthető, ahol β racionális és pozitív, akkor $F(p)$ eredeti függvénye

$$f(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(-\alpha - k\beta)} \frac{1}{t^{k\beta}} \tag{28b}$$

alakot ölt, amelyből minden, nem-negatív egész $\alpha + k\beta$-val kapcsolatos tag hiányzik.

Megjegyzendő, hogy a (28*b*) formálisan az

$$\mathfrak{L}^{-1}[p^{\alpha}] = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)\, t^{\alpha+1}}$$

inverziós formula tagonkénti alkalmazásával nyerhető a (28a)-ból. E formula viszont csak negatív α-ra nyert bizonyítást, pozitív α-ra pedig feltételes jellegű. Ezenkívül a (28b) általában nem tesz eleget a *c) α)* I° 3′ feltételnek, s így csak szinguláris eredeti függvénynek tekinthető.

Példák és feladatok

1. Állapítsuk meg az alábbi konvolúciók $\mathfrak{L}$-transzformáltját:

A) $t^n * e^{\lambda t}$; B) $t^n * \cos \omega t$; C) $e^{\lambda t} * \cos \omega t$;

D) $\operatorname{ch} \lambda t * \sin \omega t$; E) $e^{\lambda t} * \frac{\sin t}{t}$; F) $e^{\lambda t} * \operatorname{Si} t$.

Megoldás. A *δ)* I° (12′) és (14a) formulát alkalmazzuk.

A) $$\mathfrak{L}[t^n * e^{\lambda t}] = \mathfrak{L}\left[\int_0^t \tau^n e^{\lambda(t-\tau)}\, d\tau\right] = \mathfrak{L}[t^n] \cdot \mathfrak{L}[e^{\lambda t}] =$$

$$= \frac{n!}{p^{n+1}} \cdot \frac{1}{p-\lambda} = \frac{n!}{(p-\lambda)\, p^{n+1}} = \frac{1}{p}\, \mathfrak{C}[t^n * e^{\lambda t}].$$

B) $$\mathfrak{L}[t^n * \cos \omega t] = \mathfrak{L}\left[\int_0^t \tau^n \cos \omega (t-\tau)\, d\tau\right] = \mathfrak{L}[t^n] \cdot \mathfrak{L}[\cos \omega t] =$$

$$= \frac{n!}{p^{n+1}} \cdot \frac{p}{p^2+\omega^2} = \frac{n!}{p^n (p^2+\omega^2)} = \frac{1}{p}\, \mathfrak{C}[t^n * \cos \omega t].$$

C) $$\mathfrak{L}[e^{\lambda t} * \cos \omega t] = \frac{p}{(p-\lambda)(p^2+\omega^2)} = \frac{1}{p}\, \mathfrak{C}[e^{\lambda t} * \cos \omega t].$$

D) $$\mathfrak{L} \operatorname{ch} \lambda t * \sin \omega t] = \frac{p\omega}{(p^2-\lambda^2)(p^2+\omega^2)} = \frac{1}{p}\, \mathfrak{C}[\operatorname{ch} \lambda t * \sin \omega t].$$

E) $$\mathfrak{L}\left[e^{\lambda t} * \frac{\sin t}{t}\right] = \frac{1}{p-\lambda}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p\right) = \frac{1}{p}\, \mathfrak{C}\left[e^{\lambda t} * \frac{\sin t}{t}\right].$$

F) $$\mathfrak{L}[e^{\lambda t} * \operatorname{Si} t] = \frac{1}{(p-\lambda)\, p}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p\right) = \frac{1}{p}\, \mathfrak{C}[e^{\lambda t} * \operatorname{Si} t].$$

2. Invertáljuk az alábbi, szorzat alakú transzformált függvényeket:

A) $F(p) = \dfrac{1}{(p+a)(p+b)^2}$; B) $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2+\omega^2)}$,

C) $\varphi(p) = \dfrac{p}{(p+a)^3}$, D) $\varphi(p) = \dfrac{p^2}{(p+a)^3}$.

Megoldás. Újra a δ) I° (12′) és (12″) formulát alkalmazzuk, de most megfordítva.

A) $$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+a)(p+b)^2}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+a}\cdot\frac{1}{(p+b)^2}\right] =$$

$$= \mathfrak{L}^{-1}\left[\mathfrak{L}[e^{-at}]\cdot\mathfrak{L}[t\,e^{-bt}]\right] = \int_0^t e^{-a(t-\tau)}\cdot\tau\,e^{-b\tau}\,d\tau = e^{-at}\int_0^t \tau\,e^{(a-b)\tau}\,d\tau =$$

$$= \frac{e^{-at}}{(a-b)^2}\left[e^{(a-b)\tau}(a\tau - b\tau - 1)\right]_0^t = \frac{e^{-at} + [(a-b)t - 1]\,e^{-\beta t}}{(a-b)^2}.$$

B) $$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p(p^2+\omega^2)}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2+\omega^2}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[L[1(t)]\cdot L\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_0^t 1(\tau)\cdot\sin\omega(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t).$$

C) $$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p}{(p+a)^3}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\cdot\frac{p^2}{(p+a)^3}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{(p+a)^2}\cdot\frac{p}{(p+a)}\right] =$$

$$= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\cdot\mathfrak{L}[t\,e^{-at}]\cdot\mathfrak{L}[e^{-at}]\right] = \int_0^t \tau\,e^{-a\tau}\cdot e^{-a(t-\tau)}\,d\tau = e^{-at}\int_0^t \tau\,d\tau = \frac{1}{2}t^2 e^{-at}$$

D) $$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p^2}{(p+a)^3}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{p+a}\cdot\frac{p^2}{(p+a)^2}\right] =$$

$$= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\cdot\mathfrak{L}[e^{-at}]\cdot\mathfrak{L}[(1-at)\,e^{-at}]\right] = \int_0^t e^{-a(t-\tau)}\cdot(1-a\tau)\,e^{-a\tau} =$$

$$= \left(t - \frac{at^2}{2}\right)e^{-at}.$$

3. Oldjuk meg a DUHAMEL-formulával kapcsolatos alábbi feladatokat:

A) $g(t) = e^{-\lambda t}$, $f(t) = \cos\omega t$; $d(t) = ?$, $\delta(p) = ?$

B) $g(0) = B$, $f(t) = e^{-at}$, $d(t) = A - (A-B)\,e^{-bt}$; $g'(t) = ?$

Megoldás. A δ) I° (13b'') és (13b') formulát alkalmazzuk.

$$\text{A)}\quad d(t) = f(t)\,g(0) + \int_0^t f(\tau)\,g'(t-\tau)\,d\tau = \cos\omega t - \lambda\,e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau}\cos\omega\tau\,d\tau =$$

$$= \cos\omega t - \lambda\,e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\omega\sin\omega t + \lambda\cos\omega t\,e^{-\lambda t} - \lambda)}{\omega^2+\lambda^2} =$$

$$= \frac{\omega^2\cos\omega t - \lambda\,\omega\sin\omega t + \lambda^2 e^{-\lambda t}}{\omega^2+\lambda^2},$$

$$\delta(p) = \varphi(p)\,\gamma(p) = \frac{p^2}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{p}{p+\lambda} = \frac{p^3}{(p+\lambda)\,(p^2+\omega^2)};$$

ugyanez — a (13b'') nélkül — hosszadalmas:

$$\delta(p) = \frac{1}{\omega^2+\lambda^2}\left[\frac{\omega^2 p^2 - \lambda\,\omega^2 p}{p^2+\omega^2} + \frac{\lambda^2 p}{p+\lambda}\right] =$$

$$= \frac{1}{\omega^2+\lambda^2}\cdot\frac{(\omega^2+\lambda^2)\,p^3 + (\omega^2\lambda - \lambda\,\omega^2)\,p^2 + (\omega^2\lambda^2 - \lambda^2\omega^2)\,p}{(p^2+\omega^2)\,(p+\lambda)} =$$

$$= \frac{p^3}{(p+\lambda)\,(p^2+\omega^2)}.$$

$$\text{B)}\quad A - (A-B)\,e^{-bt} = B\,e^{-at} + \int_0^t f'(\tau)\,e^{-a(t-\tau)}\,d\tau;$$

$\mathfrak{L}$-transzformálás, rendezés $L[f'(t)]$-re, invertálás:

$$\frac{A}{p} - \frac{A-B}{p+b} = \frac{B}{p+a} + \mathfrak{L}[f'(t)]\cdot\frac{1}{p+a},$$

$$\mathfrak{L}[f'(t)] = \frac{[Ab + B(a-b)]\,p + A\,ab}{p(p+b)} = \frac{Aa}{p} + \frac{(A-B)\,(b-a)}{p+b},$$

$$f'(t) = Aa + (A-B)\,(b-a)\,e^{-bt}.$$

4. Alkalmazzuk az EFROS-féle általános tételt a következő adatok mellett:

$$\text{A)}\quad G(p) = \frac{1}{p},\quad q(p) = \frac{1}{p};\qquad \text{B)}\quad G(p) = \frac{1}{\sqrt{p}},\quad q(p) = \sqrt{p}.$$

Megoldás. A δ) I° (15) formulát használjuk fel.

A) Esetünkben $L[g(t;\tau)] = G(p)\,e^{-\tau q(p)} = \frac{1}{p}\,e^{-\frac{\tau}{p}}$. Az 5. A) példa értelmében $\frac{1}{p}\,e^{-\frac{1}{p}} = L[J_0(2\sqrt{t})]$, tehát a hasonlósági tétel szerint

$$g(t;\tau) = J_0(2\sqrt{t\tau}).$$

Most alkalmazzuk az említett formulát:

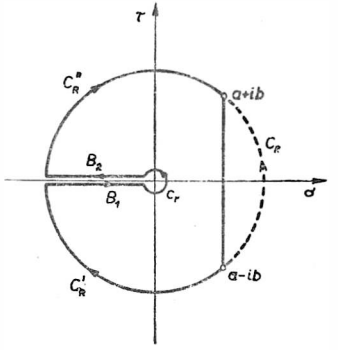
$$\frac{1}{p}F(p) = \mathfrak{L}\left[\int_0^\infty f(\tau)\, J_0(2\sqrt{t\tau})\, d\tau\right].$$

Ha speciálisan, $f(\tau) = \cos\tau$, és megfelelően, $F(p) = \dfrac{p}{p^2+1} = F\left(\dfrac{1}{p}\right)$, akkor

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\tau})\cos\tau\, d\tau\right] = \frac{1}{p^2+1}.$$

Végül figyelembe véve a $\mathfrak{L}[\sin t] = (p^2+1)^{-1}$ körülményt, a nulla indexű BESSEL-függvénynek egy nevezetes integrálformuláját kapjuk:

$$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\tau})\cos\tau\, d\tau = \sin t.$$



10. ábra

B) Most $\mathfrak{L}[g(t;\tau)] = G(p)\, e^{-\tau q(p)} = \dfrac{1}{\sqrt{p}} e^{-\tau\sqrt{p}}$, tehát az inverziós formula alkalmazásával

$$g(t;\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-\tau\sqrt{p}+pt}\frac{dp}{\sqrt{p}}.$$

Tekintsük a 10. ábrán feltüntetett zárt görbét, amely láthatóan az $L(a-ib,\ a+ib)$ egyenesszakaszból, a $|p| = R$ körvonal C_R' és C_R'' ívéből, a $(-R,\ 0)$ bemetszés B_1 és B_2 partjából és a $|p| = r$ körvonal c_r ívéből áll. E zárt görbe belsejében az integrálandó függvény reguláris és egyértékű; (a határozottság kedvéért legyen $-\pi < \arg p < \pi$). Ily módon — CAUCHY tétele szerint — az L menti integrál helyettesíthető a $C_R' + B_1 + c_r + B_2 + C_R''$ menti integrállal (az ábrázolt irányítás mellett). Mivel $\tau > 0$, a C_R' és C_R'' mentén $e^{-\tau\sqrt{p}}/\sqrt{p} \to 0$, midőn $R \to \infty$. Következésképpen — JORDAN lemmája szerint — az $e^{-\tau\sqrt{p}+pt}/\sqrt{p}$ függvény C_R' és C_R'' menti integrálja $t > 0$ és $R \to \infty$ esetén zérushoz tart; írható tehát, hogy

$$g(t;\tau) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\left[\left(\int_{B_1} + \int_{c_r} + \int_{B_2}\right) e^{-\tau\sqrt{p}+pt}\, dp/\sqrt{p}\right].$$

A B_1 mentén $p = x\, e^{-i\pi}$, $\sqrt{p} = -i\sqrt{x}$, a B_2 mentén pedig $p = x\, e^{i\pi}$, $\sqrt{p} = i\sqrt{x}$, tehát

$$\int_{B_1} = \int_R^r e^{i\tau\sqrt{x}-xt}\frac{dx}{i\sqrt{x}}, \qquad \int_{B_2} = \int_r^R e^{-i\tau\sqrt{x}-xt}\frac{dx}{i\sqrt{x}}.$$

A c_r menti integrál nyilván zérushoz tart, midőn $r \to 0$, lévén

$$\left|\int_{c_r}\right| < M \cdot 2\, r\, \pi/\sqrt{r}.$$

A fentiek alapján, a $t > 0$ esetre vonatkozólag

$$g(t;\ \tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-xt}\cos\tau\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-tu^2}\cos\tau\, u\, du = \frac{1}{\sqrt{\pi\, t}}\, e^{-\frac{\tau^2}{4t}},$$

ahol az $x = u^2$ helyettesítéssel éltünk, és felhasználtuk az így nyert POISSON-féle integrál ismert eredményét.

A $t < 0$ esetében a szaggatva rajzolt C_R körív menti integrál $R \to \infty$ -nél zérushoz tart; analóg meggondolással kapjuk, hogy $t < 0$ esetén $g(t;\ \tau) = 0$.

Végeredményben a keresett eredeti függvény

$$g(t;\ \tau) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi\, t}}\, e^{-\frac{\tau^2}{4t}}$$

alakot ölt.

Eredményünk felhasználásával és az EFROSZ-tétel alkalmazásával közvetlenül nyerhető valamely ismert $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$ függvénnyel kapcsolatban, hogy

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \mathfrak{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi\, t}}\int_0^\infty f(\tau)\, e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\, d\tau\right].$$

Ha például $F(p) = e^{-\lambda p}/p$ $(\lambda > 0)$, és megfelelően $f(t) = 1(t - \lambda)$, akkor előbbi formulánk

$$\frac{e^{-\lambda\sqrt{p}}}{p} = \mathfrak{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi\, t}}\int_\lambda^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\, d\tau\right] = \mathfrak{L}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-x^2} dx\right]$$

módon alakul, mert $\lambda > t$-nél $1(t - \lambda) = 0$, továbbá $\tau/2\sqrt{t} = x$ helyettesítéssel éltünk. Bevezetve az

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2} d\xi, \qquad 1 - \operatorname{erf} x = \operatorname{Erf} x$$

jelöléseket,* és figyelembe véve az erf $(\infty) = 1$ körülményt, fentebbi formulánk végül

$$\frac{e^{-\lambda\sqrt{p}}}{p} = \mathfrak{L}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right)\right] = \mathfrak{L}\left[\operatorname{Erf}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right)\right]$$

alakban írható.

* Az erf jelölés az *error function* (hibafüggvény) elnevezés rövitítése.

5. Invertáljuk — az első kifejtési tétel alkalmazásával — a következő transzformált függvényeket:

A) $F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}}$, B) $F(p) = \frac{1}{2p} \ln \frac{1}{1+p^2}$,

C) $F(p) = \frac{1}{p} \ln \frac{1}{1+p}$, D) $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}\,(p-1)}$.

Megoldás. E függvényeket hatványsorba fejtjük, majd a (17c') formula alapján invertáljuk.

A) Az $e^{-\frac{1}{p}}$ függvény ismert hatványsorát felhasználva, írhatjuk, hogy

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{p^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{p^{n+k+1}}.$$

Minthogy $F(p)$ a végtelenben reguláris, és ott zérushelye van, tételünk szerint formálisan át lehet térni az eredeti függvényre, nevezetesen

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^{n+k}}{(n+k)!}.$$

A jobb oldali hatványsor a J_n BESSEL-függvényre emlékeztet; pontosabban, a $t = (\tau/2)^2$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$f(t) = \left(\frac{\tau}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{n+2k} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^n J_n(\tau) = \sqrt[n]{t^2}\, J_n(2\sqrt{t}).$$

Végeredményben tehát

$$\mathfrak{L}\left[\sqrt[n]{t^2}\, J_n(2\sqrt{t})\right] = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}}.$$

Ha speciálisan, $n = 0$, akkor

$$\mathfrak{L}\left[J_0(2\sqrt{t})\right] = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}.$$

Más úton igazolható,* hogy

$$\mathfrak{L}[J_n(t)] = \frac{(\sqrt{p^2+1} - p)^n}{\sqrt{p^2+1}}, \text{ és speciálisan } \mathfrak{L}[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

B) A *d) α) — γ)* 13. A) példa értelmében

$$F(p) = \frac{1}{2p} \ln \frac{1}{1+p^2} = -\frac{1}{2p} \ln (1+p^2) = \mathfrak{L}[\mathrm{Ci}\, t].$$

Kíséreljük meg a $\mathrm{Ci}\, t = -\int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u}\, du$ függvény előállítását ∞ határú integrál nélkül!

* L. pl. *Лаврентьев—Шабат* [2].

Az $F(p)$ függvény átalakítható és sorba fejthető:

$$F(p) = -\frac{1}{2p}\ln(p^2+1) = -\frac{1}{2p}\left[\ln p^2 + \ln\left|1+\frac{1}{p^2}\right|\right] =$$

$$= -\frac{1}{p}\ln p - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{p^{-2n-1}}{n}$$

módon. Minthogy — a 8. példa szerint —

$$-\frac{1}{p}\ln p = \mathfrak{L}[\ln t + C],$$

ahol C az ún. EULER-féle állandó, azért írhatjuk, hogy

$$\mathfrak{L}[\mathrm{Ci}\, t - \ln t - C] = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{p^{-2n-1}}{2n}.$$

Az első sorfejtési tétel alkalmazásával

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{p^{-2n-1}}{2n} = \mathfrak{L}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2n\,(2n)!}\right] =$$

$$= \mathfrak{L}\left[\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n-1}}{(2n)!}\,du\right] = -\mathfrak{L}\left[\int_0^t\frac{1-\cos u}{u}\,du\right].$$

Végeredményben azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{Ci}\, t = \ln t + C - \int_0^t\frac{1-\cos u}{u}\,du.$$

Ha speciálisan $t = 1$, akkor

$$\mathrm{Ci}\, 1 = -\int_1^{\infty}\frac{\cos u}{u}\,du = C - \int_0^1\frac{1-\cos u}{u}\,du,$$

ahonnan az EULER-féle állandó

$$C = \int_0^1\frac{1-\cos u}{u}\,du - \int_1^{\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$$

előállítása nyerhető.

C) A *d) α)—γ)* 13. B) példa értelmében

$$F(p) = \frac{1}{p}\ln\frac{1}{1+p} = -\frac{1}{p}\ln(1+p) = \mathfrak{L}[\mathrm{li}\, e^{-t}].$$

Kíséreljük meg az $\mathrm{li}\, e^{-t} = \int_0^{e^{-t}}\frac{dv}{\ln v}$ függvény előállítását ∞ határú integrál nélkül.

Az $F(p)$ függvény

$$F(p) = -\frac{1}{p}\ln p - \frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{1}{p}\right) = \mathfrak{L}[\ln t + C] - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{p^{-n-1}}{n}$$

sorfejtésére alkalmazzuk az első kifejtési tételt:

$$\mathfrak{L}[\mathrm{li}\, e^{-t} - \ln t - C] = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{p^{-n-1}}{n} = -\mathfrak{L}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n\cdot n!}\right] =$$

$$= -\mathfrak{L}\left[\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{u^{n-1}}{n!}\right] = -\mathfrak{L}\left[\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right].$$

Végeredményben azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{li}\, e^{-t} = \ln t + C - \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du.$$

Ha speciálisan $t = 1$, akkor

$$\mathrm{li}\, e^{-1} = -\int_1^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du = C - \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}\,du,$$

amelyből az EULER-féle állandó

$$C = \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}\,du - \int_1^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du$$

előállítása adódik.

D) A *d) α)—γ)* 13. C) példa szerint

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}\,(p-1)} = \mathfrak{L}\left[e^t\,\Phi\sqrt{t}\right] = \mathfrak{L}\left[\frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du\right].$$

Az $F(p)$ függvényt sorba fejtve és az első kifejtési tételt alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$\mathfrak{L}\left[e^t\,\Phi(\sqrt{t})\right] = \frac{1}{\sqrt{p}\,(p-1)} = \frac{1}{p^{3/2}(1-p^{-1})} = \sum_{n=0}^{\infty} p^{-n-\frac{3}{2}} =$$

$$= \mathfrak{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\right] = \mathfrak{L}\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!}(4t)^n\right],$$

ahol felhasználtuk a Γ függvény *ζ)* I° alatt megismert sajátságait; ha pedig a t helyett t^2-et írunk, akkor

$$e^{t^2}\,\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!}(2t)^{2n+1}.$$

6. Invertáljuk — a második kifejtési tétel alapján — az alábbi transzformált függvényeket:

A) $F(p) = \dfrac{a_1 p + a_0}{(p+b_1)(p+b_2)(p+b_3)}$, B) $F(p) = \dfrac{a_1 p + a_0}{p[(p+\alpha)^2 + \beta^2]}$,

C) $F(p) = \dfrac{a_1 p + a_0}{(p^2+\omega^2)(p+\lambda)}$, D) $F(p) = \dfrac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{(p+\alpha)^3 p^2}$;

az összes állandók valósak.

Megoldás. E transzformált függvények valamennyien racionális valódi törtfüggvények, s így az *ε)* II°, III°-ban tanultak szerint invertálhatók.

A) A nevező zérushelyei egyszeresek és zérustól különbözők. A részlettörtes alak, az *ε)* II° 1′ szerint:

$$F(p) = \frac{a_1 p + a_0}{(p+b_1)(p+b_2)(p+b_3)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \left\{ \frac{a_1 p + a_0}{[(p+b_1)(p+b_2)(p+b_3)]'} \right\}_{p=-b_k} \cdot \frac{1}{p+b_k} =$$

$$= \frac{-a_1 b_1 + a_0}{(-b_1+b_2)(-b_1+b_3)} \frac{1}{p+b_1} + \frac{-a_1 b_2 + a_0}{(-b_2+b_1)(-b_2+b_3)} \frac{1}{p+b_2} +$$

$$+ \frac{-a_1 b_3 + a_0}{(-b_3+b_1)(-b_3+b_2)} \frac{1}{p+b_3}.$$

Az eredeti függvény, az *ε)* II*)* (18c) formula szerint:

$$f(t) = \frac{-a_1 b_1 + a_0}{(-b_1+b_2)(-b_1+b_3)} e^{-b_1 t} + \frac{-a_1 b_2 + a_0}{(-b_2+b_1)(-b_2+b_3)} e^{-b_2 t} +$$

$$+ \frac{-a_1 b_3 + a_0}{(-b_3+b_1)(-b_3+b_2)} e^{-b_3 t}.$$

Ha $b_k > 0$ $(k = 1, 2, 3)$, akkor a megoldás három csökkenő exponenciális függvény összege!

B) A nevező zérushelyei ismét egyszeresek, de most $p_1 = 0$. Az eredeti függvény, (18f′) formula szerint:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_1 p + a_0}{p[(p+\alpha)^2+\beta^2]}\right] = \left[\frac{a_1 p + a_0}{(p+\alpha)^2+\beta^2}\right]_{p=0} +$$

$$+ \left[\frac{a_1 p + a_0}{p \cdot 2(p+\alpha)} e^{pt}\right]_{p=-\alpha+i\beta} + \left[\frac{a_1 p + a_0}{p \cdot 2(p+\alpha)} e^{pt}\right]_{p=-\alpha-i\beta} =$$

$$= \frac{a_0}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{a_0 - a_1\alpha + i a_1 \beta}{2i\beta(-\alpha+i\beta)} e^{(-\alpha+i\beta)t} + \frac{a_0 - a_1\alpha - i a_1\beta}{-2i\beta(-\alpha-i\beta)} e^{(-\alpha-i\beta)t} =$$

$$= \frac{a_0}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{\sqrt{(a_0-a_1\alpha)^2+a_1^2\beta^2}}{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\, e^{-\alpha t}\cdot\frac{e^{i(\beta t+\varphi_1-\varphi_2)}-e^{-i(\beta t+\varphi_1-\varphi_2)}}{2i} =$$

$$= \frac{a_0}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{\sqrt{(a_0-a_1\alpha)^2+a_1^2\beta^2}}{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\, e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\varphi);$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{a_1\beta}{a_0-a_1\alpha}, \qquad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{-\alpha}, \qquad \varphi = \varphi_1-\varphi_2.$$

Ha $\alpha > 0$, akkor a megoldás egy állandó kitérés és egy csillapodó rezgés szuperpozíciója.

C) A nevező zérushelyei ismét egyszeresek, és $p_{2,3} = \pm i\omega$. Az eredeti függvény, a (19c) formula szerint:

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{a_1 p + a_0}{(p^2+\omega^2)(p+\lambda)}\right] = \frac{-a_1\lambda+a_0}{\lambda^2+\omega^2}\, e^{-\lambda t} + 2\,\mathrm{Re}\,\frac{i a_1\omega + a_0}{2i\omega(i\omega+\lambda)}\, e^{i\omega t} =$$

$$= \frac{a_0-a_1\lambda}{\lambda^2+\omega^2}\, e^{-\lambda t} + \mathrm{Im}\,\frac{a_0+i\omega a_1}{\omega(\lambda+i\omega)}\, e^{i\omega t} = \frac{a_0-a_1\lambda}{\lambda^2+\omega^2}\, e^{-\lambda t} +$$

$$+ \mathrm{Im}\,\frac{\sqrt{a_0^2+\omega^2 a_1^2}}{\omega\sqrt{\lambda^2+\omega^2}}\, e^{i(\omega t+\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{a_0-a_1\lambda}{\lambda^2+\omega^2}\, e^{-\lambda t} + \frac{\sqrt{a_0^2+\omega^2 a_1^2}}{\omega\sqrt{\lambda^2+\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi),$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{a_1\omega}{a_0}, \qquad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\lambda}, \qquad \varphi = \varphi_1-\varphi_2.$$

Ha $\alpha > 0$, akkor a megoldás egy exponenciálisan csökkenő kitérés és egy harmonikus rezgés szuperpozíciója.

D) A nevező zérushelyei többszörösek, nevezetesen $p_1 = -\alpha$, $\nu_1 = 3$; $p_2 = 0$, $\nu_2 = 2$. Az eredeti függvény, a (20f) formula szerint:

$$f(t) = \frac{1}{2!}\lim_{p\to-\alpha}\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{a_2p^2+a_1p+a_0}{p^2}\, e^{pt}\right] + \frac{1}{1!}\lim_{p\to0}\frac{d}{dp}\left[\frac{a_2p^2+a_1p+a_0}{(p+\alpha)^3}\, e^{pt}\right] =$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{p\to-\alpha} e^{pt}\left(\frac{2a_1p+6a_0}{p^4} - \frac{2a_1p+4a_0}{p^3}\, t + \frac{a_2p^2+a_1p+a_0}{p^2}\, t^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{1!}\lim_{p\to0} e^{pt}\left[\frac{-a_2p^2-2a_1p+2a_2\alpha p+a_1\alpha-3a_0}{(p+\alpha)^4} + \frac{a_2p^2+a_1p+a_0}{(p+\alpha)^3}\, t\right] =$$

$$= e^{-\alpha t}\left(\frac{-a_1\alpha+3a_0}{\alpha^4} + \frac{-a_1\alpha+2a_0}{\alpha^3}\, t + \frac{a_2\alpha^3-a_1\alpha+a_0}{2\alpha^2}\, t^2\right) +$$

$$+ \frac{a_1\alpha-3a_0}{\alpha^4} + \frac{a_0}{\alpha^3}\, t.$$

7. Igazoljuk — az ε)-ban tanultak alapján — az alábbi inverziókat:

A) $$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p+a_0}{p(p+\gamma)\left[(p+\alpha)^2+\beta^2\right]}\right]=\frac{a_0}{\gamma\beta_0^2}+\frac{\gamma-a_0}{\gamma\left[(\alpha-\gamma)^2+\beta^2\right]}e^{-\gamma t}+$$

$$+\frac{1}{\beta\beta_0}\sqrt{\frac{(a_0-\alpha)^2+\beta^2}{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}}\,e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\psi);\qquad \beta_0^2=\alpha^2+\beta^2,$$

$$\psi=\operatorname{arctg}\frac{\beta}{a_0-\alpha}-\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\gamma-\alpha}-\operatorname{arctg}\frac{\beta}{-\alpha}.$$

B) $$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p^2+a_1p+a_0}{(p+\alpha)p^2}\right]=\frac{\alpha^2-a_1\alpha+a_0}{\alpha^2}e^{-\alpha t}+\frac{a_0}{\alpha}t+\frac{a_1\alpha-a_0}{\alpha^2}.$$

C) $$\mathfrak{L}^{-}\left[\frac{p+a_0}{(p+\gamma)(p+\alpha)^2}\right]=\frac{a_0-\gamma}{(\alpha-\gamma)^2}e^{-\gamma t}+\left[\frac{a_0-\alpha}{\gamma-\alpha}t+\frac{\gamma-a_0}{(\gamma-\alpha)^2}\right]e^{-\alpha t}.$$

D) $$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p(p^2+\beta^2)^2}\right]=\frac{1}{\beta^4}(1-\cos\beta t)-\frac{1}{2\beta^3}t\sin\beta t.$$

E) $$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left[(p+\alpha)^2+\beta^2\right]p^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[t-\frac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{1}{\beta}e^{-\alpha t}\sin\left(\beta t-2\operatorname{arctg}\frac{\beta}{-\alpha}\right)\right].$$

F) $$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left[(p+\alpha)^2+\beta^2\right]^2}\right]=\frac{1}{2\beta^3}e^{-\alpha t}(\sin\beta t-\beta t\cos\beta t).$$

8. Igazoljuk — az ε)-ban tanultak alapján — az alábbi inverziókat:

A) $$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p(p+\alpha)}{(p+a)(p+b)^2}\right]=\frac{\alpha-a}{(b-a)^2}e^{-at}+\left[\frac{\alpha-b}{a-b}t+\frac{a-\alpha}{(a-b)^2}\right]e^{-bt}.$$

B) $$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p(p^2+a^2)}\right]=\frac{t}{a^2}-\frac{\sin at}{a^3}.$$

C) $$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p+\alpha}{p(p^2+a^2)}\right]=\frac{\alpha}{a^2}t+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}\sqrt{a^2+\alpha^2}\sin\left(at+\operatorname{arctg}\frac{a}{\alpha}\right).$$

D) $$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p^2}{p^4+a^4}\right]=\frac{1}{a^2}\sin\frac{at}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\frac{at}{\sqrt{2}}.$$

E) $$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p^3}{(p^2+a^2)^2}\right]=\frac{1}{2a}(\sin at+at\cos at).$$

F) $$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+9a^2)}\right]=\frac{\sin^3 at}{6a^3}.$$

9. Meghatározandó az [1(*t*)-vel szorzandó] ln *t* függvény $\mathfrak{L}$-transzformáltja.

Megoldás. Valós, pozitív *p*-re szorítkozva, kiszámítandó az

$$\mathfrak{L}[\ln t] = \int_0^\infty \ln t\, e^{-pt}\, dt$$

integrál.

A *ζ)* I° (21e) értelmében tetszőleges $a \geqq 0$ esetén az [1(*t*)-vel szorzandó] t_a függvény $\mathfrak{L}$-transzformáltja

$$\mathfrak{L}[t^a] = \int_0^\infty t^a e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty e^{a \ln t} e^{-pt}\, dt = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} = g(a).$$

Igazolható, hogy e függvény $a \geqq 0$ esetén *a* szerint az integráljel alatt differenciálható, azaz

$$g'(a) = \int_0^\infty t^a \ln t\, e^{-pt}\, dt, \quad \text{tehát} \quad g'(0) = \int_0^\infty \ln t\, e^{-pt}\, dt.$$

Ugyanakkor $[g(a) = \Gamma(a+1)/e^{(a+1)\ln p}$ lévén]

$$g'(a) = -\frac{\ln p}{p^{a+1}}\Gamma(a+1) + \frac{1}{p^{a+1}}\Gamma'(a+1),$$

következésképpen $\left[\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1 \text{ lévén}\right]$

$$g'(0) = -\frac{\ln p}{p} + \frac{1}{p}\Gamma'(1).$$

Bevezetve a $C = -\Gamma'(1) = 0{,}57721566\ldots$ értékű, ún. EULER-féle állandót, és figyelembe véve, hogy $\mathfrak{L}[C] = C/p$, végeredményül ezt írhatjuk:

$$\mathfrak{L}[\ln t] = -\frac{1}{p}\ln p - \frac{C}{p}, \quad \text{vagy} \quad \mathfrak{L}[\ln t + C] = -\frac{1}{p}\ln p.$$

10. Meghatározandó az alábbi (változó alsó határú) integrálok transzformáltja:

A) $\operatorname{Ci} t = -\int_t^\infty \frac{\cos\tau}{\tau}\, d\tau$, B) $-\operatorname{Ei}(-t) = \int_t^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau}\, d\tau$, C) $\int_t^\infty \frac{J_0(t)}{t}\, dt$.

Megoldás. A *ζ)* III° (27a) formulát alkalmazzuk.

A) $\mathfrak{L}[\operatorname{Ci} t] = \mathfrak{L}\left[-\int_t^\infty \frac{\cos\tau}{\tau}\, d\tau\right] = \frac{1}{p}\int_0^p \frac{q\, dq}{1+q^2} = \frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$.

B) $\mathfrak{L}[-\operatorname{Ei}(-t)] = \mathfrak{L}\left[\int_t^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau}\, d\tau\right] = \frac{1}{p}\int_0^p \frac{dq}{q+1} = \frac{1}{p}\ln(1+p)$.

C) $\mathfrak{L}\left[\int_t^\infty \frac{J_0(\tau)}{\tau}\, d\tau\right] = \frac{1}{p}\int_0^p \frac{dq}{\sqrt{1+q^2}} = \frac{1}{p}\operatorname{arsh} p = \frac{1}{p}\ln\left(q + \sqrt{1+p^2}\right)$.

e) Az operátorszámítás alkalmazása lineáris differenciálegyenletek megoldására

α) Közönséges, lineáris, állandó együtthatójú differenciálegyenletek

I°. Különösen egyszerűen alkalmazható az operátorszámítás az

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \quad (1)$$

alakú közönséges, lineáris, állandó együtthatójú *differenciálegyenlet*

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \quad (2)$$

kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldásának meghatározására. Tegyük fel, hogy $a_0 \neq 0$, továbbá, hogy az adott $f(t)$, az ismeretlen $x(t)$ és az utóbbi $x'(t)$, $x''(t)$, $\ldots$, $x^{(n)}(t)$ deriváltja eredeti függvény, vagyis eleget tesz a *d) α)* I° 1′—3′ feltételnek. Állapodjunk meg az $\mathfrak{L}[x(t)] = X(p)$, $\mathfrak{L}[f(t)] = F(p)$ jelölések használatában.

II°. Alkalmazzuk most az $\mathfrak{L}$-*transzformációt* (vagy akár a $\mathfrak{L}^*$-transzformációt) az (1) differenciálegyenlet mindkét oldalára, figyelembe véve e transzformáció linearitását (*d) α)* I°), valamint az eredeti függvény deriváltjainak transzformációs szabályát (*d) β)* I°), amely tudvalevőleg igénybe veszi a (2) kezdeti feltételeket. Ekkor a következő, ún. *operátoregyenlet*et kapjuk:

$$\begin{aligned} &a_0 p^n X(p) - a_0(x_0 p^{n-1} + x_1 p^{n-2} + \ldots + x_{n-1}) + \\ &+ a_1 p^{n-1} X(p) - a_1(x_0 p^{n-2} + x_1 p^{n-3} + \ldots + x_{n-2}) + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ a_{n-1} pX(p) - a_{n-1} x_0 + a_n X(p) = F(p); \end{aligned} \quad (3a)$$

ugyanez rendezés után

$$\begin{aligned} &(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n) X(p) = F(p) + \\ &+ a_0 x_0 p^{n-1} + (a_0 x_1 + a_1 x_0) p^{n-2} + \ldots + (a_0 x_{n-1} + a_1 x_{n-2} + \ldots + a_{n-1} x_0) \end{aligned}$$

alakot, a $D_n(p)$ és a $K_{n-1}(p)$ jelölés bevezetésével pedig

$$D_n(p) X(p) = F(p) + K_{n-1}(p) \quad (3c)$$

alakot ölt. Ezen, $X(p)$-re nézve *lineáris algebrai egyenlet* megoldása, az ún. *operátoros megoldás* nyilván

$$X(p) = \frac{F(p) + K_{n-1}(p)}{D_n(p)}. \quad (4)$$

Feltételeink mellett — igazolhatóan — mindig létezik az (1)-nek és a (2)-nek eleget tevő, valamint az eredeti függvény szükséges tulajdonságaival rendelkező partikuláris megoldás, s ez *a t változós megoldás* éppen az $X(p)$ inverz-transzformáltja:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{F(p) + K_{n-1}(p)}{D_n(p)}\right]. \quad (5)$$

Az *inverzió* tényleges végrehajtásához felhasználjuk a *d)*-ben tanult tételeket, szabályokat (pl. a hasonlósági, eltolási tételt, a differenciálási, integrálási szabályt, szorzás (konvolúció-) tételt, a kifejtési tételeket stb.).

β) Közönséges, lineáris, állandó együtthatójú differenciálegyenlet-rendszerek

Teljesen analóg módon alkalmazható az operátorszámítás a (másodrendűre szorítkozva)

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{\nu k}\frac{d^2x_k}{dt^2}+b_{\nu k}\frac{dx_k}{dt}+c_{\nu k}x_k\right)=f_\nu(t)\quad(\nu=1,2,\ldots n) \tag{6}$$

alakú közönséges, lineáris, állandó együtthatójú *differenciálegyenlet-rendszer*

$$x_k(0)=\alpha_k,\quad x_k'(0)=\beta_k\quad(k=1,2,\ldots n) \tag{7}$$

kezdetifeltétel-rendszert kielégítő partikuláris megoldásának meghatározására.

Ha $f_\nu(t)$, $x_k(t)$, $x_k'(t)$ és $x_k''(t)$ eredeti függvények, és az $\mathfrak{L}[x_k(t)]=X_k(p)$, $\mathfrak{L}[f_\nu(t)=F_\nu(p)$ jelöléseket alkalmazzuk, akkor a (6) differenciálegyenlet-rendszernek a (7) kezdetifeltétel-rendszert figyelembe vevő $\mathfrak{L}$-transzformáltja, az *operátoregyenlet-rendszer* nyilván így alakul:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{\nu k}p^2+b_{\nu k}p+c_{\nu k})X_k(p)=F_\nu(p)+\sum_{k=1}^{n}[(a_{\nu k}p+b_{\nu k})\alpha_k+a_{\nu k}\beta_k]. \tag{8}$$

Ezen, $X_k(p)$-re nézve *lineáris algebrai egyenletrendszert* pl. a CRAMER-szabály szerint megoldva, az $X_k(p)$ operátoros megoldás-rendszert, majd ezek invertálásával az $x_k(t)$ t változós megoldás-rendszert nyerjük.

γ) Közönséges, lineáris, változó együtthatójú differenciálegyenletek

I°. Az operátorszámítás hasznosnak bizonyul néhány közönséges lineáris változó együtthatójú differenciálegyenlet megoldásánál is. Az $\mathfrak{L}[x(t)]=X(p)$ jelöléssel élünk, és felhasználjuk az eredeti és transzformált függvény differenciálási szabályából folyó alábbi (és más hasonló) eredményeket:

$$\mathfrak{L}[x]=X,\ \mathfrak{L}[tx]=-X',\ \mathfrak{L}[t^2x]=X'',\ldots,$$

$$\mathfrak{L}[x']=pX-x(0),\ \mathfrak{L}[tx']=-(pX'),\ \mathfrak{L}[t^2x']=(pX)'',\ldots, \tag{9}$$

$$\mathfrak{L}[x'']=p^2X-x(0)p-x'(0),\ \mathfrak{L}[tx'']=-(p^2X)+x(0),\ \mathfrak{L}[t^2x'']=(p^2X)''\ldots$$

II°. Most az $\mathfrak{L}$-transzformációval nyert *operátoregyenlet* is [$X(p)$-re nézve] *lineáris differenciálegyenlet* marad (és nem algebrai egyenlet, mint az α)-ban és β)-ban), de ez olykor egyszerűbb az eredeti differenciálegyenletnél.

Az operátoregyenletet — a kezdeti feltételek figyelembevételével — az $X(p)$-re megoldva, majd ezt invertálva, az $x(t)$ partikuláris megoldást kapjuk.

Példák és feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi másodrendű, állandó együtthatójú differenciálegyenleteknek a megadott kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldását:

A) $\ddot{x}-3\dot{x}+2x=e^t$, $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=0$;

B) $\ddot{x}+2\dot{x}+(1+a^2)x=0$, $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=x_1$;

C) $\ddot{x}+a^2x=b\sin at$, $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=x_1$;

D) $\ddot{x}-x=e^t$, $x(0)=3$, $\dot{x}(0)=3/2$.

Megoldás. A (3b) operátoregyenletből előállítjuk a (4) operátoros megoldást, majd az utóbbit alkalmas módon invertáljuk.

A) Az operátoregyenlet

$$(p^2 - 3p + 2)\, X = \frac{1}{p-1} + (p-3)$$

alakú, az operátoros megoldás tehát a következő:

$$X = \frac{1}{(p-1)(p^2-3p+2)} + \frac{p-3}{p^2-3p+2} = \frac{1+(p-3)(p-1)}{(p-1)^2(p-2)} =$$

$$= \frac{p-2}{(p-1)^2} = \frac{p-1-1}{(p-1)^2} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Az utóbbi alak már közvetlenül invertálható, nevezetesen

$$x(t) = e^t - t\,e^t = e^t(1-t).$$

B) Az operátoregyenlet:

$$(p^2 + 2p + 1 + a^2)\, X = x_0(p+2) + x_1,$$

az operátoros megoldás:

$$X = \frac{x_0(p+2)+x_1}{p^2+2p+1+a^2} = \frac{x_0(p+2)+x_1}{(p+1)^2+a^2} =$$

$$= x_0 \frac{p+1}{(p+1)^2+a^2} + \frac{x_0+x_1}{a} \frac{a}{(p+1)^2+a^2}.$$

A keresett t változós megoldás:

$$x(t) = x_0\, e^{-t} \cos at + \frac{x_0+x_1}{a} e^{-t} \sin at = e^{-t}\left(x_0 \cos at + \frac{x_0+x_1}{a} \sin at\right).$$

C) $(p^2 + a^2)\, X = \dfrac{ab}{p^2+a^2} + (x_0\, p + x_1)$,

$$X(p) = \frac{ab}{(p^2+a^2)^2} + x_0 \frac{p}{p^2+a^2} + \frac{x_1}{a} \frac{a}{p^2+a^2};$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{ab}{(p^2+a^2)^2}\right] = 2\,\mathrm{Re} \lim_{p \to ia} \frac{d}{dp}\left[\frac{ab\,(p-ia)^2}{(p^2+a^2)^2}\, e^{pt}\right] = 2\,ab\,\mathrm{Re}\left[\frac{d}{dp}\frac{e^{pt}}{(p+ia)^2}\right] =$$

$$= 2\,ab\,\mathrm{Re}\left[t\frac{e^{pt}}{(p+ia)^2} - 2\frac{e^{pt}}{(p+ia)^3}\right]_{p=ia} = 2\,ab\,\mathrm{Re}\left[t\frac{e^{iat}}{-4a^2} - 2\frac{e^{iat}}{-8ia^3}\right] =$$

$$= \frac{b}{2a^2}(\sin at - at \cos at);$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{b}{2a}t\right)\cos at + \left(\frac{x_1}{a} + \frac{b}{2a^2}\right)\sin at.$$

D) $x(t) = e^t\left(\dfrac{t}{a} + 2\right) + e^{-t}$.

2. Határozzuk meg az alábbi magasabbrendű, állandó együtthatójú differenciálegyenleteknek a zérus kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldását:

A) $\dddot{x} + 3\ddot{x} + 3\dot{x} + x = 1$; B) $\dddot{x} + x = 1$; C) $x^{IV} + 2\ddot{x} + x = \sin t$.

Megoldás. A (3a, b, c), (4) és (5) formulákat alkalmazzuk, figyelembe véve, hogy most $x_0 = x_1 = x_2 (= x_3) = 0$.

A) Az operátoregyenlet:

$$(p^3 + 3p^2 + 3p + 1) X = (p + 1)^3 X = \frac{1}{p},$$

az operátoros megoldás:

$$X = \frac{1}{p(p+1)^3} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+1)^3}.$$

A keresett t változós megoldás:

$$x(t) = 1 - e^{-t}\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right).$$

B) $(p^3 + 1) X = \frac{1}{p}$, $\quad X = \frac{1}{p(p^3+1)} = \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{3p_k^3} \frac{1}{p - p_k}$,

$$x(t) = 1 - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}\operatorname{Re} e^{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t} = 1 - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

C) $(p^4 + 2p^2 + 1) X = (p^2 + 1)^2 X = \frac{1}{p^2+1}$, $\quad X = \frac{1}{(p^2+1)^3}$,

$$x(t) = \operatorname{Re} \lim_{p \to i} \frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{e^{pt}}{(p+1)^3}\right] = \frac{1}{8}(3 - t^2)\sin t - \frac{3}{8} t \cos t.$$

3. *Tömegpont csillapított szabad lengései.* Az m tömegű, a $t = 0$ időpontban x_0 kitérésű és v_0 sebességű anyagi pont a $P_c = -x/c$ $(c > 0)$ rugalmas visszatérítő erő és a $P_r = -r\dot{x}$ $(r \geqq 0)$ csillapító erő hatása alatt $\ddot{x}$ gyorsulással mozog. A D'ALEMBERT-elv szerint a $P_m = -m\ddot{x}$ tehetetlenségi erő egyensúlyban van a P_c és P_r erővel, azaz

$$P_m + P_r + P_c = -\left(m\ddot{x} + r\dot{x} + \frac{x}{c}\right) = 0.$$

A mozgás differenciálegyenlete — az m-mel osztva, és a $2\delta = r/m$, $\omega_0^2 = 1/mc$ jelöléseket bevezetve — a kezdeti feltételekkel együtt így alakul:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

Az operátoregyenlet most

$$(p^2 + 2\delta p + \omega_0^2) X = x_0 p + (v_0 + 2\delta x_0),$$

az operátoros megoldás tehát

$$X(p) = \frac{x_0 p + (v_0 + 2\delta x_0)}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} = \frac{M(p)}{N(p)}.$$

A periodikus esetre ($p_{1,2} = -\delta \pm i\omega$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ valós) szorítkozva, az $X(p)$ inverze, vagyis az időbeli kitérés a következőképpen adódik:

$$x(t) = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{M(p_1)}{N'(p_1)}\,e^{p_1 t} = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{x_0\,p_1 + (v_0 + 2\,\delta\,x_0)}{2(p_1 + \delta)}\,e^{p_1 t} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\,\frac{x_0(-\delta + i\,\omega) + (v_0 + 2\,\delta\,x_0)}{2\,i\,\omega}\,e^{(-\delta + i\omega)t} = \mathrm{Im}\left(\frac{v_0 + \delta\,x_0}{\omega} + i\,x_0\right)e^{(-\delta + i\omega)t} =$$

$$= \mathrm{Im}\,\sqrt{\left(\frac{v_0 + \delta\,x_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2}\;e^{(-\delta t + i\omega t + \varphi)} = \sqrt{\left(\frac{v_0 + \delta\,x_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2}\;e^{-\delta t}\sin(\omega\,t + \varphi),$$

ahol a $\varphi = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x_0\,\omega}{v_0 + \delta\,x_0}$ jelöléssel éltünk.

4. *Tömegpont csillapított kényszerlengései.* $P_k = m\,a_k$ kényszerítő erő esetén egyensúlyi egyenletünk

$$P_m + P_r + P_c + P_k = -\left(m\,\ddot{x} + r\,\dot{x} + \frac{x}{c}\right) + P_k = 0$$

módon, rendezés és m-mel való egyszerűsítés után, a bevezetett jelölésekkel pedig

$$\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = a_k$$

módon írható.

Tegyük fel, hogy $a_k = a \sin \nu\,t$ és $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Ekkor az operátoregyenlet és megoldása így alakul.

$$(p^2 + 2\,\delta\,p + \omega_0^2)\,X = \frac{a\,\nu}{p^2 + \nu^2}, \qquad X = \frac{a\,\nu}{(p^2 + 2\,\delta\,p + \omega_0^2)\,(p^2 + \nu^2)}.$$

Ismét a periodikus esetre ($p_{1,2} = -\delta \pm i\,\omega$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ valós) szorítkozva, az $X(p)$ inverze, vagyis az időbeli kitérés a következőképpen adódik:

$$x(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{a\,\nu}{2(p_1 + \delta)\,(p_1^2 + \nu^2)}\,e^{p_1 t} + \frac{a\,\nu}{(p_3^2 + 2\,\delta\,p_3 + \omega_0^2)\,2\,p_3}\,e^{p_3 t}\right] =$$

$$= 2\,a\,\nu\,\mathrm{Re}\left[\frac{e^{(-\delta + i\omega)t}}{2\,i\,\omega\,(\delta^2 - \omega^2 + \nu^2 - 2\,i\,\delta\,\omega)} + \frac{e^{i\nu t}}{(-\nu^2 + 2\,i\,\delta\,\nu + \omega_0^2)\,2\,i\,\nu}\right] =$$

$$= a\,\nu\,\mathrm{Im}\left[\frac{e^{-\delta t}\,e^{i(\omega t - \varphi_1)}}{\omega\,\sqrt{(\delta^2 + \nu^2 - \omega^2)^2 + 4\,\delta^2\,\omega^2}} + \frac{e^{i(\nu t - \varphi_2)}}{\nu\,\sqrt{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + 4\,\delta^2\,\nu^2}}\right] =$$

$$= \frac{a\,\nu\,e^{-\delta t}}{\omega\,\sqrt{(\delta^2 + \nu^2 - \omega^2)^2 + 4\,\delta^2\,\omega^2}}\sin(\omega\,t - \varphi_1) + \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + 4\,\delta^2\,\nu^2}}\sin(\nu\,t - \varphi_2)$$

$$\varphi_1 = \mathrm{arctg}\,\frac{-2\,\delta\,\omega}{\delta^2 + \nu^2 - \omega^2}, \qquad \varphi_2 = \mathrm{arctg}\,\frac{2\,\delta\,\nu}{\omega_0^2 - \nu^2}.$$

Eszerint az $x(t)$ mozgás egy exponenciálisan csillapodó tranziens komponens és egy harmonikus komponens eredője.

5. Határozzuk meg az alábbi első- és másodrendű állandó együtthatójú differenciálegyenlet-rendszereknek a megadott kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldását:

A) $\dot{x} = -7x + y, \quad \dot{y} = -2x - 5y, \quad y(0) = 1, \quad x(0) = 1;$

B) $\left.\begin{aligned}(2\ddot{x} - \dot{x} + 9x) - (\ddot{y} + \dot{y} + 3y) &= 0\\ (2\ddot{x} + \dot{x} + 7x) - (\ddot{y} - \dot{y} + 5y) &= 0\end{aligned}\right\}, \qquad \begin{aligned}x(0) &= \dot{x}(0) = 1,\\ y(0) &= \dot{y}(0) = 0;\end{aligned}$

C) $\left.\begin{aligned}\ddot{x} - x + y + z &= 0\\ x + \ddot{y} - y + z &= 0\\ x + y + \ddot{z} - z &= 0\end{aligned}\right\}, \qquad \begin{aligned}x(0) &= 1, \quad y(0) = z(0) = 0,\\ \dot{x}(0) &= \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0.\end{aligned}$

D) $\dot{x} = z + y - x, \quad \dot{y} = z + x - y, \quad \dot{z} = x + y + z,$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0.$$

Megoldás. Felírjuk a (8) operátoregyenlet-rendszert, megoldjuk az operátoros ismeretlenekre mint lineáris egyenletrendszert, végül invertálunk.

A) Az operátoregyenlet-rendszer:

$$pX = -7X + Y + 1, \qquad pY = -2X - 5Y + 1;$$

ugyanez rendezés után:

$$\begin{aligned}(p + 7)X \quad - Y &= 1,\\ 2X + (p + 5)\,Y &= 1.\end{aligned}$$

Az operátoros megoldás-rendszer a CRAMER-szabály szerint:

$$X = \frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & p+5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}p+7 & -1\\ 2 & p+5\end{vmatrix}} = \frac{p+6}{p^2+12p+37} = \frac{p+6}{(p+6)^2+1},$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix}p+7 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}p+7 & -1\\ 2 & p+5\end{vmatrix}} = \frac{p+5}{p^2+12p+37} = \frac{(p+6)-1}{(p+6)^2+1}.$$

Inverzióval a keresett t változós megoldás-rendszer:

$$x(t) = e^{-6t}\cos t, \quad y(t) = e^{-6t}(\cos t - \sin t).$$

B) Az operátoregyenlet-rendszer:

$$\begin{aligned}(2p^2 - p + 9)\,X - (p^2 + p + 3)\,Y &= 2p + 1,\\ (2p^2 + p + 7)\,X - (p^2 - p + 5)\,Y &= 2p + 3;\end{aligned}$$

ugyanez összeadás, illetve kivonás, majd rendezés után:

$$2X - Y = 2\frac{p+1}{p^2+4}, \quad X + Y = \frac{1}{p-1}.$$

Az operátoros megoldás-rendszer:

$$X = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-1} + 2\frac{p+1}{p^2+4}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{p-1} + \frac{2}{3}\frac{p}{p^2+4} + \frac{1}{3}\frac{2}{p^2+4},$$

$$Y = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{p-1} - 2\frac{p+1}{p^2+4}\right) = \frac{2}{3}\frac{1}{p-1} - \frac{2}{3}\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{3}\frac{2}{p^2+4}.$$

Inverzióval a keresett t változós megoldás rendszer:

$$x(t) = \frac{1}{3}(e^t + 2\cos 2t + \sin 2t), \quad y(t) = \frac{1}{3}(2e^{-t} - 2\cos 2t - \sin 2t).$$

C) $X = \dfrac{p^3}{(p^2+1)(p^2-2)}$, $\quad Y = Z = -\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}$;

$$x(t) = \frac{2}{3}\operatorname{ch}(t\sqrt{2}) + \frac{1}{3}\cos t, \quad y(t) = z(t) = -\frac{1}{3}\operatorname{ch}(t\sqrt{2}) + \frac{1}{3}\cos t.$$

D) $x(t) = \dfrac{1}{6}(2e^{-t} + e^{2t} + 3e^{-2t})$, $\quad y(t) = \dfrac{1}{6}(2e^{-t} + e^{2t} - 3e^{-t})$,

$$z(t) = -\frac{1}{3}(e^{-t} - e^{2t}).$$

6. Határozzuk meg az alábbi másodrendű változó együtthatójú differenciálegyenleteknek a megadott kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldását:

A) $t\ddot{x} + \dot{x} + tx = 0$, $\quad x(0) = 1$, $\quad \dot{x}(0) = 0$.

B) $t\ddot{x} + (1-n)\dot{x} + x = 0$, $\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Megoldás. A (9) transzformációs eredmények alapján előállítjuk és megoldjuk az operátoregyenletet mint lineáris differenciálegyenletet, majd invertálunk.

A) Az operátoregyenlet:

$$-(p^2X)' + 1 + pX - 1 - X' = -p^2X' - 2pX + pX - X' =$$

$$= -(1+p^2)X' - pX = 0, \quad \frac{X'}{X} = -\frac{p}{1+p^2}.$$

Az operátoros megoldás:

$$\ln\frac{X}{C} = -\frac{1}{2}\ln(1+p^2) = \ln\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad X = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}};$$

$$x(0) = \lim_{p\to\infty} pX = \lim_{p\to\infty}\frac{Cp}{\sqrt{p^2+1}} = C = 1.$$

A t változós megoldás:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\right] = J_0(t).$$

B) Az operátoregyenlet:

$$p^2 X' + (p + p n - 1) X = 0, \quad \frac{X'}{X} = \frac{1}{p^2} - \frac{n+1}{p}.$$

Az operátoros megoldás:

$$\ln \frac{X}{C} = -\frac{1}{p} - (n+1) \ln p, \qquad X = C \frac{e^{-\frac{1}{p}}}{p^{n+1}},$$

ahol $x(0) = \lim_{p \to \infty} C \frac{e^{-\frac{1}{p}}}{p^n} = 0$ miatt C tetszőleges. A t változós megoldás:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[C \frac{e^{-\frac{1}{p}}}{p^{n+1}}\right] = C t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}).$$

Megjegyzendő, hogy mindkét példában $t = 0$ a differenciálegyenlet szinguláris pontja; ezzel érthetővé válik, hogy az operátoregyenletek miért nem tartalmazzák az $\dot{x}(0)$ értékét.

e) Parciális, lineáris, változó együtthatójú differenciálegyenletek

I°. Az operátorszámítás sikeresen alkalmazható a matematikai fizika parciális differenciálegyenleteivel kapcsolatos ún. *nem-stacionárius feladatok* megoldására is. E helyen csupán az

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{10}$$

alakú parciális, lineáris differenciálegyenletekről lesz szó, ahol az ismeretlen u két változónak, mégpedig az x helyzetkoordinátának és a t időnek a függvénye, az a, b, c, a_1, és b_1 pedig az x-nek a $(0, l)$ szakaszon megadott folytonos függvényei.

Feltételezve, hogy az egész $(0, l)$ szakaszon $a > 0$, az $a_1 < 0$ sajátságú, ún. *hiperbolikus esetet* és az $a_1 = 0$, $b_1 < 0$ sajátságú, ún. *parabolikus esetet* fogjuk vizsgálni.*

A nem-stacionárius feladat esetünkben a következőképpen fogalmazható:

Keresendő a (10) *differenciálegyenletnek olyan* $u(x, t)$ $[0 \leqq x \leqq l, t \geqq 0]$ *megoldása, amely eleget tesz az*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t'(x, 0) = \psi(x) \tag{11}$$

kezdeti feltételeknek (a második csak hiperbolikus esetben adandó meg), továbbá az

$$u(0, t) = f(t), \quad \alpha u_x'(l, t) + \beta u_t'(l, t) = \gamma u(l, t) \tag{12}$$

kerületi feltételeknek, ahol α, β *és* γ *állandó.*

E feladatok nem-stacionárius volta abban jut kifejezésre, hogy megoldásuk lényegesen függ a kezdeti feltételektől, s így a fizikai folyamat nem állandósult, tranziens viselkedését írja le.

* L. bővebben sorozatunk B. VIII. kötetében.

II°. Tegyük fel, hogy u, u'_x és u''_{xx} mint t függvényei eredeti függvények; $\mathfrak{L}$-*transzformáltjukat* jelöljük

$$\mathfrak{L}[u(x,t)] = \int_0^\infty u(x,t)\, e^{-pt}\, dt = U(p,x),$$

$$\mathfrak{L}[u'_x(x,t)] = \int_0^\infty u'_x(x,t)\, e^{-pt}\, dt = U'_x(p,x) = \frac{dU}{dx}, \tag{13a}$$

$$\mathfrak{L}[u''_{xx}(x,t)] = \int_0^\infty u''_{xx}(x,t)\, e^{-pt}\, dt = U''_{xx}(p,x) = \frac{d^2U}{dx^2}$$

módon. [Megjegyezzük, hogy az $U(p,x)$, $U_x(p,x)$, $U''_{xx}(p,x)$ transzformáltak a továbbiakban egy (x) változójú (p) paraméterű függvényként szerepelnek, s ezért az utóbbi kettőnél a ∂ jel helyett a d használható.] Az eredeti függvény differenciálási szabálya szerint — a (11) *kezdeti feltételek* figyelembevételével — írhatjuk továbbá, hogy

$$\mathfrak{L}[u'(x,t)] = pU - \varphi(x), \quad \mathfrak{L}[u_{tt}(x,t)] = p^2\, U - p\,\varphi(x) - \psi(x).$$

Feltételezve még, hogy $f(t)$ is eredeti függvény, és $\mathfrak{L}[f(t)] = F(p)$, a (12) *kerületi feltételek* $\mathfrak{L}$-transzformáltja

$$U(p,0) = F(p), \quad \alpha\, U'_x(p,l) + \beta\,[p\, U(p,l) - \varphi(l)] = \gamma\, U(p,l)$$

módon írható.

III°. Ezek alapján megállapítható, hogy *az operátorszámítás a* (10) *parciális differenciálegyenlettel kapcsolatban fentebb vázolt nem-stacionárius feladat megoldását az*

$$a\, U''_{xx} + b\, U'_x + A\, U + B = 0 \tag{14}$$

$$(A = c + a_1 p^2 + b_1 p, \quad B = -a_1 p\,\varphi - a_1\,\psi - b_1\,\varphi, \quad p = \sigma + i\tau)$$

alakú közönséges, lineáris, változó együtthatójú differenciálegyenlet

$$U(p,0) = F(p), \quad \alpha\, U'_x(p,l) + (\beta\, p - \gamma)\, U(p,l) - \beta\,\varphi(l) = 0 \tag{15}$$

kerületi feltételeket kielégítő partikuláris megoldásának meghatározására vezeti vissza.

A fentebbi megfontolások értelmében nem-stacionárius feladatunk u megoldásának U transzformáltja kielégíti a (14)-et és a (15)-öt. Ha ismeretes, hogy nem-stacionárius feladatunknak csak egyetlen u megoldása van, mely első és második deriváltjaival együtt megfelel az eredeti függvény követelményeinek, továbbá ha (14), (15) feladatnak szintén csak egyetlen U megoldása van, akkor nem-stacionárius feladatunk megoldását nyilván az U inverziója útján kaphatjuk meg.

Példák

1. *Hővezetés a 0 kezdeti hőfokú, bal végén az $f(t)$ függvény szerint változó hőfokú, jobbra a végtelenbe nyúló (hőszigetelt) drót mentén.* Keresendő a (parabolikus típusú)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (a^2 = \text{const})$$

hővezetési differenciálegyenletnek olyan $u(x, t)$ $[0 < x,\ 0 \leqq t]$ megoldása, amely eleget tesz az

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = f(t)$$

kezdeti, illetve kerületi feltételnek. A III° értelmében e nem-stacionárius feladat $\mathfrak{L}$-transzformációval a

$$pU = a^2 U''_{xx}, \quad U(0, p) = F(p)$$

feladatra vezethető vissza. Az operátoros differenciálegyenlet általános megoldása nyilván

$$U(x, p) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x},$$

az operátoros kerületi feltételt és az $|U(\infty, p)| < K \neq \infty$ korlátossági követelményt kielégítő partikuláris megoldás pedig

$$U(x, p) = F(p)\, e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Az $u(x, t)$ meghatározása céljából legyen először $f(t) \equiv 1(t)$; akkor $F(p) = 1/p$, $U_1(x, p) = e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}/p$, tehát — a d) $\delta)$—$\zeta)$ 4. $B)$ példa figyelembevételével —

$$u_1(x, t) = \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\tau^2}\, d\tau.$$

Tetszőleges $f(t)$ esetén a DUHAMEL-integrált alkalmazzuk; az $U(p) = F(p)\, e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} = pF(p)\, U_1(p)$ egyenlőségből kiindulva, és az

$$u_1(x, 0) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\tau^2}\, d\tau = 0, \quad u'_{1t}(x, t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \left(-\frac{x}{4\, a\, t^{3/2}}\right)$$

adatokat felhasználva, azt kapjuk, hogy

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{x}{4\, a^2\, \xi^2}\right) e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Integrálunk értéke $x = 0$-nál

$$u(0, t) = f(t) \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = f(t),$$

összhangban a kezdeti feltétellel.

2. *Hővezetés az u_0 kezdeti hőfokú, bal végén a 0 hőfokú környezetbe hőátadó, jobbra a végtelenbe nyúló (hőszigetelt) drót mentén.* A hővezetési egyenlet most az

$$u(x, 0) = u_0, \quad u'_x(0, t) = hu(0, t) \quad (h = \text{const})$$

feltételek mellett kell megoldani. A (kezdeti feltételt figyelembe vevő) operátoregyenlet és az operátoros kezdeti feltétel — a III° (14), (15) szerint —

$$pU - a^2 U''_{xx} = u_0, \quad U'_x(0, p) = hU(0, t)$$

alakú. Az egyenlet ($x \to \infty$-nél korlátos)

$$U(x, p) = \frac{u_0}{p} + C\, e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

megoldásai közül az

$$U'_x(0, p) = -C\frac{\sqrt{p}}{a} = h\left[\frac{u_0}{p} + C\right] = h\,U(0, p)$$

feltételt kielégítő, vagyis az

$$U(x, p) = \frac{u_0}{p}\left(1 - \frac{h}{\frac{\sqrt{p}}{a} + h}\, e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right) = \frac{u_0}{p}\left(1 - e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right) + \frac{u_0}{a}\,\frac{1}{\sqrt{p}\left(\frac{\sqrt{p}}{a} + h\right)}\, e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

a keresett partikuláris megoldás. A *d) δ)—ζ)* 4. *B)* példa, az eltolási *(d) γ)* I°), illetve az EFROSZ-tétel *(d) δ)* I°) felhasználásával rendre írhatjuk, hogy

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{u_0}{p}\left(1 - e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)\right] = u_0 \operatorname{erf}\left[\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right],$$

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(p)] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{\frac{p}{a} + h}\, e^{-p\frac{x}{a}}\right] = a\, e^{-h(at-x)}\, 1(at - x),$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{p}}{a} + h}\, e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right] = \frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int_{\frac{x}{a}}^{\infty} e^{-h(a\tau - x) - \frac{\tau^2}{4t}}\, d\tau.$$

Végül — némi átalakítással — azt kapjuk, hogy

$$u(x, t) = u_0\left\{\operatorname{erf}\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right\}.$$

3. *Az l hosszúságú, kezdetben nyugalomban levő, bal végén rögzített, jobb végén hosszirányú $A \sin \omega t$ erőhatás alatt álló rúd hosszanti rezgése.* Keresendő a (hiperbolikus típusú)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a^2 = \text{const})$$

hullámegyenletnek olyan $u(x, t)$ $[0 \leqq x \leqq l,\ 0 \leqq t]$ megoldása, amely eleget tesz az

$$u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0$$

kezdeti és az

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = \frac{A}{F} \sin \omega t$$

kerületi feltételeknek. A megfelelő operátoregyenlet és általános megoldása nyilván

$$a^2 U''_{xx} - p^2 U = 0, \qquad U = C_1 \operatorname{ch} \frac{p}{a} x + C_2 \operatorname{sh} \frac{p}{a} x,$$

következésképpen az

$$U(0, p) = 0, \quad U'_x(l, p) = \frac{A}{F} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

operátoros kerületi feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás

$$U = \frac{b}{p(p^2 + \omega^2)} \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{a} p}{\operatorname{ch} \frac{l}{a} p} \qquad \left(b = \frac{A a \omega}{F}\right).$$

E meromorf függvény pólusai (ch $i z = \cos z$ figyelembevételével):

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = \pm i \omega, \quad q_k = i \frac{\pi a}{l} \left(k - \frac{1}{2}\right) = i \omega_k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

ezek valamennyien elsőrendűek és különbözők, hacsak $\omega_k \neq \omega$ semmilyen k-nál (e feltevéssel a rezonanciát zárjuk ki).

Most alkalmazzuk a második kifejtési tétel meromorf függvényekre vonatkozó általánosítását (*d) ε)* III°), tekintetbe véve, hogy $p_3 = \overline{p_2}$, $q_{-k} = \overline{q_{k+1}}$ és felhasználva az

$$M = b \operatorname{sh} \frac{x}{a} p, \qquad M(0) = 0, \qquad M(i\omega) = b\, i \sin \frac{x}{a} \omega, \qquad M(i\omega_k) = b\, i \sin \frac{x}{a} \omega_k,$$

$$N(p) = p(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{l}{a} p, \qquad N'(i\omega) = -2\omega^2 \cos \frac{l}{a} \omega,$$

$$N'(i\omega_k) = (-1)^k \frac{\omega_k l}{a} (\omega^2 - \omega_k^2)$$

adatokat; így a következő végeredményt kapjuk (a szummázást a pozitív képzetes részű pólusokra vonatkoztatva):

$$u(x, t) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{M(i\omega)}{N'(i\omega)} e^{i\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M(i\omega_k)}{N'(i\omega_k)} e^{i\omega_k t} \right] =$$

$$= \frac{1}{\omega^2 \cos \frac{\omega l}{a}} \sin \frac{x}{a} \omega \sin \omega t + \frac{2ab}{l} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{x}{a} \omega_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k}$$

f) Az operátorszámítás néhány műszaki alkalmazása

α) Tranziens jelenségek elektromos áramkörökben

I°. Amint ismeretes, az elektromos áramkörben az R ohmos, illetve az L öninduktív, illetve a C kapacitív elemen átfolyó $i(t)$ áram és a végein mért $u(t)$ feszültség között rendre

$$u(t) = R\,i(t), \quad u(t) = L\frac{di(t)}{dt}, \quad u(t) = \frac{1}{C}\left[\int_0^t i(\tau)\,d\tau + q_0\right] \tag{1}$$

összefüggés áll fenn, ahol q_0 a kondenzátor kezdeti töltése

Bevezetve az $\mathfrak{L}[i(t)] = I(p)$ *operátoros áram*ot és az $\mathfrak{L}[u(t)] = U(p)$ *operátoros feszültség*et, az (1) időegyenletek $\mathfrak{L}$-transzformáltjaként az

$$U(p) = R\,I(p), \quad U(p) = L[p\,I(p) - i_0], \quad U(p) = \frac{1}{Cp}[I(p) + q_0] \tag{2a}$$

operátoregyenleteket kapjuk, ahol $i_0 = i(0)$ a kezdeti áram. Ha speciálisan $q_0 = i_0 = 0$, ami a bekapcsolási feladatnak felel meg, akkor a (2a) — a p változó elhagyása mellett —

$$U = RI, \quad U = Lp\,I, \quad U = \frac{I}{Cp} \tag{2b}$$

alakba megy át.

A fentebbi operátoregyenletek az

$$U = Z\,I \quad \text{vagy} \quad I = \frac{1}{Z}\,U \tag{3a, b}$$

alakú *operátoros* OHM-*törvény*be foglalhatók össze, ahol Z az *operátoros ellenállás (impedancia)*, $1/Z$ pedig az *operátoros vezetőképesség (admittancia)*. A (2b) esetekben rendre

$$Z = R, \quad Z = Lp, \quad Z = \frac{1}{Cp}. \tag{4}$$

Két, Z_1 illetve Z_2 impedanciájú elemet *sorba* kapcsolva azt kapjuk, hogy $U = U_1 + U_2 = Z_1\,I + Z_2\,I = (Z_1 + Z_2)\,I = Z\,I$, azaz

$$Z = Z_1 + Z_2. \tag{5}$$

Ugyanazokat *párhuzamosan* kapcsolva, az $I = I_1 + I_2 = U/Z_1 + U/Z_2 = U/Z$, vagyis

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \tag{6}$$

eredményre jutunk. Ily módon *két összekapcsolt elem operátoros impedanciája, illetve admittanciája — bekapcsolási feladat esetén — a szokásos szabályok szerint nyerhető.*

Ha $i_0 \neq 0$, és $q_0 \neq 0$, akkor a (3a, b) kiegészítő tagokkal bővül. Például ohmos, öninduktív és kapacitív elemet sorba kapcsolva *ún. R, L, C áramkör*be, a (3a, b) helyett

$$U = \left(R + Lp + \frac{1}{Cp}\right) I + \left(\frac{q_0}{Cp} - L\,i_0\right) = Z\,I + U_0, \quad I = \frac{1}{Z}(U - U_0) \tag{7}$$

veendő, ahol $Z = R + Lp + 1/Cp$ az áramkör eredő operátoros impedanciája.

II°. Ha olyan *elektromos láncot* vizsgálunk, amelynek elemei R, L, C áramkörök, akkor mindegyikre felírható egy

$$R_k\, i_k(t) + L_k \frac{di_k(t)}{dt} + \frac{1}{C_k}\left[\int_0^t i_k(\tau)\, d\tau + q_{k0}\right] + \sum_{\nu \neq k} M_{k\nu} \frac{di_\nu(t)}{dt} = u_k(t) \qquad (8)$$

alakú időegyenlet s ennek megfelelően egy

$$U_k = \sum_\nu Z_{k\nu}\, I_\nu + \left(\frac{q_{k0}}{p\, C_k} - L_k\, i_{k0} - \sum_{\nu \neq k} M_{k\nu}\, i_{\nu 0}\right), \qquad (9a, b)$$

$$Z_{kk} = R_k + L_k\, p + \frac{1}{C_k\, p}, \quad Z_{k\nu} = M_{k\nu}\, p \quad (\nu \neq k)$$

alakú operátoregyenlet, ahol R_k, L_k, C_k, $L[i_k] = I_k$, $L[u_k] = U_k$ a k-adik R, L, C áramkörre vonatkozó mennyiségek, $M_{k\nu}$ pedig a k-adik és a ν-edik áramkör között fellépő kölcsönös indukció együtthatója, végül $k = 1, 2, \ldots, n$, és $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Összeadva az együttesen zárt áramkört képező R, L, C áramkörök (9a) egyenleteit és alkalmazva a $\sum_k U_k = U$ alakú *második operátoros* KIRCHHOFF-törvényt, az

$$U = \sum_k \sum_\nu Z_{k\nu}\, I_\nu + \sum_k \left(\frac{q_{k0}}{p\, C_k} - L_k\, i_{k0} - \sum_{\nu \neq k} M_{k\nu}\, i_{\nu 0}\right) \qquad (10)$$

egyenletet kapjuk, ahol U e zárt áramkör eredő operátoros el. mot. ereje. Felírandó még az összes elágazási pontokra a

$$\sum_j I_j = 0 \qquad (11)$$

alakú *első operátoros* KIRCHHOFF-*törvény*, ahol az összegezés kiterjesztendő az illető pontban elágazó összes láncszemekre. *A* (10), (11) *egyenletrendszer lehetővé teszi az elektromos lánc összes elemeire vonatkozó operátoros áramok meghatározását.*

III°. Térjünk ki még a szorzási (konvolúció-) tétel és a DUHAMEL-integrál [d) δ) I°] szerepére. Egyszerűség kedvéért egyetlen áramkör bekapcsolási feladatát vizsgáljuk; operátoros árama — a (3b) szerint —

$$I = \frac{1}{Z}\, U = A\, U. \qquad (12)$$

Egységnyi elektromotoros erőt kapcsolva be az áramkörbe [$u(t) = 1(t)$, $U(p) = 1/p$], a megfelelő operátoros áram nyilván $I_1 = A/p$, ahonnan $A = p\, I_1$; tetszőleges $u(t) = \mathfrak{L}^{-1}[U(p)]$ el. mot. erő bekapcsolásakor pedig — a (12) szerint — az

$$I = A\, U = p\, I_1 \cdot U \qquad (13)$$

operátoros áram adódik. Az $i_1(t) = \mathfrak{L}^{-1}[I_1(p)]$ jelöléssel élve, a (13) inverz-transzformáltjaként — a DUHAMEL-integrállal összhangban — az időbeli áram így alakul:

$$i(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t i_1(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = i_1(t)\, u(0) - \int i_1(\tau)\, u_\tau'(t-\tau)\, d\tau. \qquad (14)$$

Ily módon, *ha ismeretes az áramkörben egységnyi el. mot. erő bekapcsolásakor folyó $i_1(t)$ áram, akkor zárt alakban közvetlenül felírható az áramkörben $u(t)$ el. mot. erő bekapcsolásakor jelentkező $i(t)$ áram.*

IV°. Végül — a *d) α)* II°-ben tanult limesz-relációk alapján — rámutathatunk azon egyszerű összefüggésre, amely az $i_1(t)$ áramnak az $u(t) = 1(t)$ el. mot. erő bekapcsolása pillanatában ($t = 0$) jelentkező, illetve állandósult ($t = \infty$) értéke, valamint az $A(p) = 1/Z(p)$ operátoros admittancia $p = \infty$-nél, illetve $p = 0$-nál felvett értéke között áll fenn. Ugyanis az $A = p\,I_1$ egyenlőségből — az említett limesz-relációk alapján — azt kapjuk, hogy

$$i_1(0) = \lim_{p\to\infty} p\,I_1 = A(\infty), \quad i_1(\infty) = \lim_{p\to 0} p\,I_1 = A(0). \tag{15}$$

Ezen összefüggések előnyösen alkalmazhatók a számítások ellenőrzésére.

Példák

1. *E_0 el. mot. erő bekapcsolása R, L áramkörbe* (11. ábra). A kör operátoros impedanciája $Z = R + Lp$, operátoros el. mot. ereje $U = E_0/p$; operátoros árama tehát — az $i_0 = i(0) = 0$ figyelembevételével, a (3b) szerint —

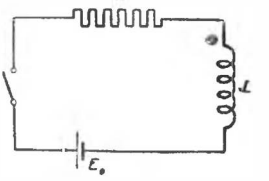
$$I = \frac{1}{Z}\,U = A\,U = \frac{1}{R + Lp}\cdot\frac{E_0}{p},$$

vagy inverzióra előkészítve:

$$I = \frac{E_0}{L}\,\frac{1}{p\left|p + \frac{R}{L}\right|} = \frac{E_0}{L}\cdot\frac{L}{R}\cdot\frac{p + \frac{R}{L} - p}{p\left|p + \frac{R}{L}\right|} = \frac{E_0}{R}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}}\right).$$

Végül — inverzió útján — az időbeli áram így adódik:

$$i(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$



11. ábra

Az állandósult áram — a (15)-nek megfelelően —

$$i(\infty) = \lim_{p\to 0} p\,I = E_0\,A(0) = \left|\frac{E_0}{R + Lp}\right|_{p=0} = \frac{E_0}{R},$$

amely éppen az ohmos egyenárammal azonos.

2. *E_0 el. mot. erő bekapcsolása R, L, C áramkörbe.* A kör operátoros árama — a (7b) szerint és $i_0 = q_0 = 0$ figyelembevételével —

$$I = \frac{1}{Z}\,U = AU = \frac{1}{R + Lp + \frac{1}{Cp}}\cdot\frac{E_0}{p} =$$

$$= \frac{E_0}{L}\,\frac{1}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}} = \frac{E_0}{L}\,\frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{E_0}{L}\,\frac{M(p)}{N(p)},$$

ahol a nevező zérushelyei

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \beta.$$

A második kifejtési tétel és az $N'(p) = (p - p_2) + (p - p_1) = 2p - (p_1 + p_2) = 2(p + \alpha)$, $N'(p_{1,2}) = \pm 2\beta$ figyelembevételével az időbeli áram így alakul:

$$i(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{E_0}{L}\left|\frac{1}{2\beta}\,\frac{1}{(p+\alpha)-\beta} - \frac{1}{2\beta}\,\frac{1}{(p+\alpha)+\beta}\right|\right] =$$

$$= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{E_0}{\beta L}\,\frac{\beta}{(p+\alpha)^2-\beta^2}\right] = \frac{E_0}{\beta L}\,e^{-\alpha t}\,\mathrm{sh}\,\beta t \qquad (\beta \neq 0),$$

ahol felhasználtuk a transzformált függvény eltolási tételét [d) γ) II°]. A most nyert aperiodikus áram a túlcsillapítás $\left|\beta^2 = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0\right|$ esetére vonatkozik.

A normális csillapítás ($\beta^2 < 0$, $\beta = i\omega$) esetére vonatkozó áram periodikus, lévén ($\mathrm{sh}\, i x = i \sin x$ miatt)

$$i(t) = \frac{E_0}{i\omega L}\,e^{-\alpha t}\,\mathrm{sh}\,i\omega t = \frac{E_0}{L\omega}\,e^{-\alpha t}\sin\omega t.$$

Végül a kritikus csillapítás ($\beta^2 = \beta = 0$) esetére vonatkozó áram az előzőkből $\beta \to 0$, illetve $\omega \to 0$ határátmenettel, vagyis

$$i(t) = \lim_{\beta\to 0}\frac{E_0}{\beta L}\,e^{-\alpha t}\,\mathrm{sh}\,\beta t = \frac{E_0}{L}\,t\,e^{-\alpha t}\cdot\lim_{\beta\to 0}\frac{\mathrm{sh}\,\beta t}{\beta t} =$$

$$= \frac{E_0}{L}\,t\,e^{-\alpha t}\cdot\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin\omega t}{\omega t} = \frac{E_0}{L}\,t\,e^{-\alpha t}$$

módon nyerhető; ez szintén aperiodikus.

Megjegyzendő, hogy az állandósult áram mindhárom esetben zérus, lévén

$$i(\infty) = \lim_{p\to 0} p\,I = E_0\,A(0) = \left(\frac{E_0\,p}{L\,p^2 + R\,p + \frac{1}{C}}\right)_{p=0} = 0.$$

3. *$E_0 \sin\omega t$ (illetve $E_0\,e^{-\lambda t}$) el. mot. erő bekapcsolása R, L áramkörbe.* Az 1. példa értelmében a R, L áramkörben egységnyi ($E_0 = 1$) el. mot. erő bekapcsolásakor

$$i_1(t) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

áram folyik; a (14) alatti DUHAMEL-integrál szerint tehát áramkörünkben az $u(t) = E_0 \sin\omega t$ el. mot. erő bekapcsolásakor jelentkező áram így alakul:

$$i(t) = i_1(t)\,u(0) - \int_0^t i_1(\tau)\,u_\tau(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= 0 - \int_0^t \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}\right)[-E_0\,\omega\cos\omega(t-\tau)\,]\,d\tau = \frac{E_0\omega}{R}\int_0^t \cos\omega\,(\tau - t)\,d\tau -$$

$$- \frac{E_0\omega}{R}\int_0^t e^{-\frac{R}{L}\tau}\cos\omega(\tau - t)\,d\tau = \frac{E_0}{R}\left|\sin\omega(\tau - t)\right|_0^t -$$

$$- \frac{E_0\omega}{R}\left[\frac{\omega\sin\omega(\tau - t) - \frac{R}{L}\cos\omega(\tau - t)}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2}\,e^{-\frac{R}{L}\tau}\right]_0^t = \frac{E_0}{R}\sin\omega\,t -$$

$$- \frac{E_0\omega}{R}\left[-\frac{\frac{R}{L}}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2}\,e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\omega\sin\omega\,t + \frac{R}{L}\cos\omega\,t}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2}\right] =$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\left[\sin\omega\,t\cdot\left(\frac{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}{R} - \frac{L^2\omega^2}{R\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\right) - \cos\omega\,t\cdot\frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\,e^{-\frac{R}{L}t}\right] = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\left(\sin\omega\,t\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} - \cos\omega\,t\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} + \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}(\sin\omega\,t\cdot\cos\varphi - \cos\omega\,t\cdot$$

$$\cdot\sin\varphi + e^{-\frac{R}{L}t}\cdot\sin\varphi) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}[\sin(\omega\,t - \varphi) + e^{-\frac{R}{L}t}\sin\varphi],$$

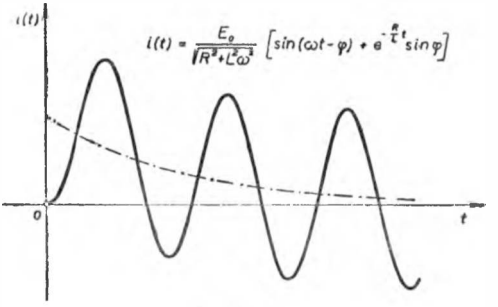
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{L\omega}{R}.$$

Az áramerősség időbeli változása a 12. ábrán látható; a szinuszos áram az exponenciálisan csökkenő tranziens áramra szuperponálódik. Ha, speciálisan, $R \ll L\,\omega$, akkor az áramerősség egy félperiódus múlva a szinuszos amplitudónak közel kétszeresét éri el, lévén

$$\left(\omega\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{2} = \pi,\ \varphi \approx \frac{\pi}{2}\ \text{miatt}\right)$$

$$i(T/2) \approx \frac{E_0}{L\omega}[0 - (-1)\cdot 1 +$$

$$+ 1\cdot 1] = 2\frac{E_0}{L\,\omega}.$$



12. ábra

Az $u(t) = E_0 e^{-\lambda t}$ esetben az előbbi számítás így alakul:

$$i(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) - \lambda \frac{E_0}{R}\int_0^t \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}\right) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau =$$

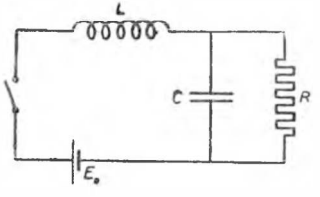
$$= \frac{E_0}{R}\left[\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) - (1 - e^{-\lambda t}) + \lambda e^{-\lambda t} \frac{e^{\left(-\frac{R}{L}+\lambda\right)t} - 1}{\lambda - \frac{R}{L}}\right] =$$

$$= \frac{E_0}{R}\left(e^{-\lambda t} - e^{-\frac{R}{L}t}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\frac{R}{L} - \lambda}\right) = \frac{E_0}{R - \lambda L}\left(e^{-\lambda t} - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

4. *E_0 el. mot. erő bekapcsolás $L, C \parallel R$ áramkörbe* (13. ábra) A kör eredő operátoros ellenállása — az (5), (6) szerint —

$$Z = Lp + \frac{1}{Cp + \frac{1}{R}} = \frac{LCRp^2 + Lp + R}{RCp + 1},$$

operátoros el. mot. ereje $U = E_0/p$, operátoros áram — a (3b) szerint, $i_0 = 0$, $q_0 = 0$ figyelembevételével —



13. ábra

$$I = \frac{1}{Z} U = AU = \frac{E_0(RCp + 1)}{p(LCRp^2 + Lp + R)} =$$

$$= \frac{E_0}{LCR} \frac{RCp + 1}{p(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{E_0}{LCR} \frac{M(p)}{p\,L(p)}.$$

A nevező zérushelyei egyszeresek, nevezetesen

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -\frac{1}{2CR} \pm \sqrt{\frac{1}{4C^2R^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm i\omega,$$

feltéve, hogy a periodikus ($L < 4R^2C$) esetre szorítkozunk.

A második kifejtési tételnek a jelen speciális esetre vonatkozó alakját [*d*) *ε*) II° (18f')] alkalmazzuk; felhasználva az

$$M(0) = 1, \; L(0) = p_1 p_2 = \alpha^2 + \omega^2 = \frac{1}{LC}, \quad M(p_{2,3}) = RC(-\alpha \pm i\omega) + 1,$$

$$L'(p) = 2p - (p_1 + p_2) = 2(p + \alpha), \; L'(p_{2,3}) = \pm 2i\omega$$

adatokat, az időbeli áram így alakul:

$$i(t) = \frac{E_0}{L C R}\left[L C + \frac{R C(-\alpha + i\omega) + 1}{(-\alpha + i\omega)\, 2 i \omega} e^{(-\alpha+i\omega)t} + \right.$$

$$\left. + \frac{R C(-\alpha - i\omega) + 1}{(-\alpha - i\omega)(-2 i \omega)} e^{(-\alpha-i\omega)t}\right] = \frac{E_0}{R} + \frac{E_0}{2 i \omega L C R} e^{-\alpha t}\left[\left(R C - \frac{\alpha + i\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\right) e^{i\omega t} - \right.$$

$$\left. - \left(R C - \frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\right) e^{-i\omega t}\right] = \frac{E_0}{R} + \frac{E_0}{\omega L C R} e^{-\alpha t} \cdot \operatorname{Im}\left[R C - L C(\alpha + i\omega)\right] e^{i\omega t} =$$

$$= \frac{E_0}{R} + \frac{E_0}{\omega L C R} e^{-\alpha t} \cdot \left[(R C - \alpha L C) \sin \omega t - \omega L C \cos \omega t\right] =$$

$$= \frac{E_0}{R}\left\{1 - e^{-\alpha t}\left[\cos \omega t + \left(\frac{\alpha}{\omega} - \frac{R}{L \omega}\right) \sin \omega t\right]\right\}.$$

5. $E_0 \sin \omega t$ *el. mot. erő bekapcsolása* R, L, C *áramkörbe.* A 2. példa és $U = E_0 \omega/(p^2 + \omega^2)$ figyelembevételével, az operátoros áram

$$I_0(p) = \frac{1}{R + L p + \frac{1}{C p}} \cdot \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{E_0 \omega p}{\left(L p^2 + R p + \frac{1}{C}\right)(p^2 + \omega^2)}$$

alakú; a nevező zérushelyei konjugált komplexek, mégpedig — a periodikus (ω_0 valós) esetre szorítkozva —

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\frac{1}{L C} - \frac{R^2}{4 L^2}} = -\alpha \pm i \omega_0, \quad p_{3,4} = \pm i \omega.$$

A második kifejtési tételnek esetünkre vonatkozó alakját [*d*) *ε*) II° (19c)] alkalmazva, ezt írhatjuk:

$$i_0(t) = E_0 \omega \cdot 2 \operatorname{Re}\left[\frac{p_1}{(p_1^2 + \omega^2)(2 L p_1 + R)} e^{p_1 t} + \frac{i\omega}{2 i \omega\left(-L \omega^2 + R i \omega + \frac{1}{C}\right)} e^{i\omega t}\right].$$

A szükséges s elég hosszadalmas algebrai átalakításokat elvégezve, és az elektrotechnikában szokásos

$$X = L \omega - \frac{1}{C \omega}, \quad X' = L \omega + \frac{1}{C \omega}, \quad Z_0 = \sqrt{R^2 + X^2}$$

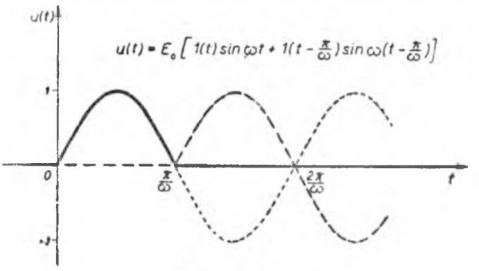
jelöléseket bevezetve, az időbeli áramra a következő végeredményt kapjuk:

$$i_0(t) = \frac{E_0}{Z_0} \sin(\omega t - \varphi_1) - \frac{E_0}{\omega_0 Z_0 \sqrt{L C}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t - \varphi_2),$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X}{R}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega_0 X}{\alpha X'}.$$

6. *$E_0 \sin \omega t$ el. mot. erő bekapcsolása ($t_1 = 0$) és kikapcsolása ($t_2 = \pi/\omega$), R, L, C áramkörben.* Az el. mot. erő esetünkben nyilván (14. ábra)

$$u(t) = E_0 \left[1(t) \sin \omega t + 1\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \sin \omega \left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \right]$$



14. ábra

módon formulázható; operátoros alakja tehát — az eltolási tétel [*d) γ)* I°] értelmében —

$$U = \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2} \left(1 + e^{-p\frac{\pi}{\omega}} \right).$$

Az operátoros áram — az előző példabeli $I_0(p) = \mathfrak{L}[i_0(t)]$ felhasználásával —

$$I = \frac{1}{R + Lp + \frac{1}{Cp}} \cdot \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2} \left(1 + e^{-p\frac{\pi}{\omega}} \right) = I_0 \left(1 + e^{-p\frac{\pi}{\omega}} \right)$$

alakú; az időbeli áram tehát a $t_2 = \pi/\omega$ időpont után [midőn $1(t - \pi/\omega) = 1(t) = 1$] — az említett eltolási tétel újabb alkalmazásával — így alakul:

$$i(t) = 1(t)\, i_0(t) + 1\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) i_0\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) =$$

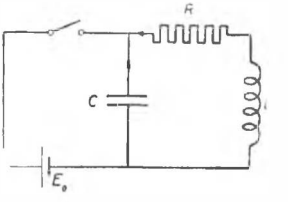
$$= -\frac{E_0}{\omega_0 Z_0 \sqrt{LC}} e^{-at} \left[\sin(\omega_0 t - \varphi_2) + e^{\frac{a\pi}{\omega}} \sin\left(\omega_0 t - \varphi_2 - \omega_0 \frac{\pi}{\omega}\right) \right].$$

7. *E_0 el. mot. bekapcsolása ($t_1 = 0$) és kikapcsolása ($t_2 = \tau$), $(R, L) \,||\, C$ áramkörben* (15. ábra). Előbb a bekapcsolási jelenség vizsgálandó. A két párhuzamos ág operátoros feszültsége — az áramirányok figyelembevételével —

$$I_1(R + Lp) = -I\frac{1}{Cp_2} = -\frac{E_0}{p};$$

az operátoros áramok tehát

$$I_1 = -\frac{E_0}{p(R + Lp)}, \qquad I_2 = E_0 C,$$



15. ábra

az időbeli áramok pedig — az 1. példa felhasználásával —

$$i_1(t) = -\frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \qquad i_2(t) = E_0 C\, \delta(t)$$

alakúak, ahol $\delta(t)$ a nulladrendű impulzusfüggvény. A bekapcsolási jelenség végső s egyben a kikapcsolási jelenség kezdeti értékei a következők:

$$i_0 = i_1(\tau) = -\frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}\right), \qquad q_0 = \int_0^{\tau} i_k(t)\, dt = E_0 C \int_0^{\tau} \delta(t)\, dt = E_0 C.$$

Térjünk rá a kikapcsolási feladatra, $t' = t - \tau$ jelölés bevezetése mellett (így $t = \tau$-nak $t' = 0$ felel meg). Az operátoros feszültségegyenlet — a (7) értelmében —

$$\left(R + L\,p + \frac{1}{C\,p}\right) I = L\,i_0 - \frac{q_0}{C\,p} = -\frac{E_0 L}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}\right) - \frac{E_0}{p}$$

alakot ölt; belőle az

$$I = -\frac{E_0}{L\,p^2 + R\,p + \frac{1}{C}} - p\,\frac{\frac{E_0 L}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}\right)}{L\,p^2 + R\,p + \frac{1}{C}}$$

operátoros áram nyerhető. Végül az időbeli áram — a 2. példa periodikus eredménye és a differenciálási szabálya [*d*) *β*) I°] alapján — a következőképpen alakul:

$$i(t) = -\frac{E_0}{L\,\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega\, t - \frac{E_0}{R\,\omega}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}\right) \cdot \frac{d}{dt}\left(e^{-\alpha t} \sin \omega\, t\right) =$$

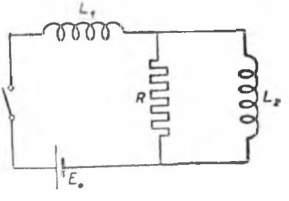
$$= -\frac{E_0}{L\,\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega\, t - \frac{E_0}{R\,\omega}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}\right) e^{-\alpha t}\left(\omega \cos \omega\, t - \alpha \sin \omega\, t\right).$$

8. *E_0 el. mot. erő bekapcsolása L_1, $(R \,||\, L_2)$ áramkörbe* (16. ábra). A kör operátoros impedanciáia

$$Z = L_1\,p + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{L_2\,p}} = L_1\,p + \frac{R\,L_2\,p}{R + L_2\,p} = p\,\frac{L_1 L_2\,p + R(L_1 + L_2)}{R + L_2\,p},$$

operátoros el. mot. ereje $U = E_0/p$; operátoros árama tehát

$$I = \frac{1}{Z}\,U = \frac{(R + L_2\,p)}{p\,[L_1 L_2\,p + R(L_1 + L_2)]} \cdot \frac{E_0}{p} = I_1 \cdot I_2.$$



16. ábra

A szorzási (konvolúció-) tételt [*d*) *δ*) I°] alkalmazzuk a (második kifejtési tétellel nyert)

$$i_1(t) = \frac{1}{L_1 + L_2} + \frac{R\left(1 - \frac{L_1 + L_2}{L_1}\right)}{-R(L_1 + L_2)} e^{-\frac{R(L_1 + L_2)}{L_1 L_2} t} =$$

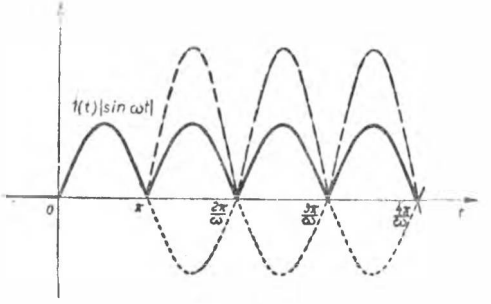
$$= \frac{1}{L_1 + L_2}\left(1 + \frac{L_2}{L_1} e^{-\frac{R(L_1 + L_2)}{L_1 L_2} t}\right) \quad \text{és az} \quad i_2(t) = E_0$$

függvénypárra; így az időbeli áram a következőképpen alakul:

$$i(t) = \int_0^t i_1(\tau)\, i_2(t - \tau)\, d\tau = \frac{E_0}{L_1 + L_2} \int_0^t \left(1 + \frac{L_2}{L_1} e^{-R\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2}\tau}\right) d\tau =$$

$$= \frac{E_0}{L_1 + L_2}\left[t + \frac{L_2^2}{R(L_1 + L_2)}\left(1 - e^{-R\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2} t}\right)\right].$$

9. $E_0 \,|\sin \omega t|$ *el. mot. erő bekapcsolása* R, L *áramkörbe.* Felhasználva az $1(t) \cdot \sin \omega t$ | függvény



17. ábra

$$1(t)\,|\sin \omega t| = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sin\omega\left(t-k\frac{\pi}{\omega}\right)1\left(t-k\frac{\pi}{\omega}\right)\right] + \sin\omega\left(t-k\frac{\pi}{\omega}-\frac{\pi}{\omega}\right)1\left(t-k\frac{\pi}{\omega}-\frac{\pi}{\omega}\right)\Bigg]$$

előállítását (17. ábra) és ennek megfelelő

$$\mathfrak{L}\left[1(t)\,|\sin \omega t|\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\left(e^{-k\frac{\pi}{\omega}p} + e^{-(k+1)\frac{\pi}{\omega}p}\right) =$$

$$= \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\left(1+e^{-\frac{\pi}{\omega}p}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{\pi}{\omega}p}\right)^k = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,\frac{1+e^{-\frac{\pi}{\omega}p}}{1-e^{-\frac{\pi}{\omega}p}} \qquad (\mathrm{Re}\,p>0)$$

transzformáltját, az operátoros áramot így írhatjuk fel:

$$I = \frac{1}{Z}\,U = \frac{1}{R+Lp}\cdot\frac{E_0\,\omega}{p^2+\omega^2}\,\frac{1+e^{-\frac{\pi}{\omega}p}}{1-e^{-\frac{\pi}{\omega}p}}\,.$$

Az $I(p)$ pólusai (valamennyien elsőrendűek) és ottani reziduumai a következők:

$$p_1 = -\frac{R}{L}\,, \quad \operatorname*{res}_{p=p_1} I(p) = \lim_{p\to p_1}(p-p_1)\,I(p) = \frac{E_0}{L}\,\frac{\omega}{\frac{R^2}{L^2}+\omega^2}\,\frac{1+e^{\frac{\pi R}{\omega L}}}{1-e^{\frac{\pi R}{\omega L}}}\,;$$

$$p_{2,3} = \pm i\,\omega, \quad \operatorname*{res}_{p=p_2} I(p) = \operatorname*{res}_{p=p_3} I(p) = 0, \quad \text{mert} \quad 1+e^{\mp i\pi} = 1-1 = 0;$$

$$q_k = 2\,i\,\omega\,k, \quad \operatorname*{res}_{p=q_k} I(p) = \lim_{p\to q_k}(p-q_k)\,I(p) =$$

$$= \frac{1}{R+2\,i\,\omega\,k\,L}\cdot\frac{E_0\,\omega}{\omega^2(1-4\,k^2)}\cdot 2\lim_{p\to q_k}\frac{-1}{\dfrac{e^{-\frac{\pi}{\omega}p}-e^{-\frac{\pi}{\omega}q_k}}{p-q_k}} =$$

$$= \frac{1}{R+2\,i\,\omega\,k\,L}\cdot\frac{E_0}{\omega(1-4\,k^2)}\cdot\frac{2\omega}{\pi} = \frac{2\,E_0(R-2\,i\,\omega\,k\,L)}{\pi(1-4\,k^2)\,(R^2+4\,\omega^2\,k^2\,L^2)}\,,$$

ahol $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ és pl. $k=0$-nál $q_0 = 0$, $\operatorname*{res}_{p=q_0} I(p) = 2\,E_0/\pi\,R$. A reziduumtétellel kombinált MELLIN-integrál [*d) ε) III°*] alapján $I(p)$ inverze, vagyis az időbeli

áram így alakul:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(G_R)} I(p)\, e^{pt}\, dp = \sum \operatorname{res}\left[I(p)\, e^{pt}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} e^{p_k t} \operatorname*{res}_{p=p_k} I(p) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{q_k t} \operatorname*{res}_{p=q_k} I(p) = E_0 \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} \frac{1 + e^{\frac{\pi R}{\omega L}}}{1 - e^{\frac{\pi R}{\omega L}}} e^{-\frac{R}{L}t} +$$

$$+ \frac{2E_0}{\pi R} + \frac{2E_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 4k^2} \cdot \left| \frac{e^{2i\omega k t}}{R + 2i\omega k L} + \frac{e^{-2i\omega k t}}{R - 2i\omega k L} \right| =$$

$$= -E_0 \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} e^{-\frac{R}{L}t} \operatorname{cth} \frac{\pi R}{2\omega L} + \frac{2E_0}{\pi R} + \frac{4E_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 4k^2} \frac{\cos(2k\omega t - \varphi_k)}{\sqrt{R^2 + 4\omega^2 k^2 L^2}},$$

ahol $\operatorname{tg} \varphi_k = 2\omega k L/R$.

Fizikailag az első tag az exponenciálisan csökkenő tranziens áram, a második az állandó áram, végül a harmadik a (FOURIER-sorral megadott) periodikus áram. Látható, hogy helyesen méretezett önindukciós tekercs jelenlétében az el. mot. erő ingadozásai az áramerősségben kevéssé tükröződnek.

10. *E_0 el. mot. erő bekapcsolása $(R_1, L_1) \sim M \sim (R_2, L_2)$ csatolt áramkörök egyikébe* (18. ábra). A két induktíve csatolt áramkör operátoregyenlet-rendszere — a (9a, b) alapján, $U_1 = E_0$, $U_2 = 0$, $i_{10} = i_{20} = 0$ figyelembevételével — így írható:

$$I_1(R_1 + L_1 p) + I_2 M p = \frac{E_0}{p}, \quad I_1 M p + I_2(R_2 + L p_2) = 0.$$

Ennek megoldása I_1-re

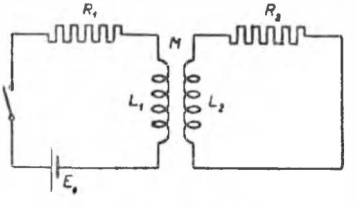
$$I_1 = \frac{E_0(R_2 + L_2 p)/p}{(R_1 + L_1 p)(R_2 + L_2 p) - M p^2} =$$

$$= \frac{E_0}{p} \frac{R_2 + L_2 p}{p^2(L_1 L_2 - M^2) + p(L_1 R_2 + L_2 R_1) + R_1 R_2}$$

módon, vagy a

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2}, \quad \alpha_1 = \frac{R_1}{2L_1}, \quad \alpha_2 = \frac{R_2}{2L_2}$$

jelölések bevezetésével



18. ábra

$$I_1 = \frac{E_0}{L_1 p} \frac{p + 2\alpha_2}{(1 - k^2)p^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)p + 4\alpha_1\alpha_2} = \frac{E_0}{L_1(1 - k^2)} \frac{p + 2\alpha_2}{p(p - p_1)(p - p_2)}$$

módon alakul, ahol

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 - k^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 - k^2}\right)^2 - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1 - k^2}} = -\lambda \pm \beta.$$

Végül — a második kifejtési tétel alkalmazásával — az első áramkörben folyó (időbeli) áramra a következő eredmény adódik:

$$i_1(t) = \frac{E_0}{L_1(1-k^2)}\left[\frac{2\alpha_2}{4\alpha_1\alpha_2 - (1-k^2)^2} + \frac{p_1+2\alpha_2}{p_1(p_1-p_2)}e^{p_1 t} + \frac{p_2+2\alpha_2}{p_2(p_2-p_1)}e^{p_2 t}\right] =$$

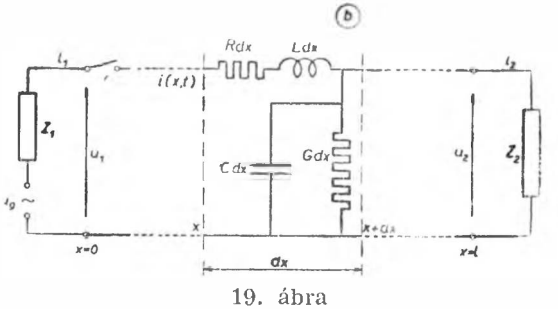
$$= \frac{E_0}{R_1} + \frac{E_0 e^{-\lambda t}}{2\beta(1-k^2)L_1 p_1 p_2}\left[(p_1 p_2 + 2\alpha_2 p_2)e^{\beta t} - (p_1 p_2 + 2\alpha_2 p_1)e^{-\beta t}\right] =$$

$$= \frac{E_0}{R_1} + \frac{E_0 e^{-\lambda t}}{8\beta\alpha_1\alpha_2 L_1}\left[-4\alpha_2\beta \operatorname{ch}\beta t + \frac{8\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}{1-k^2}\operatorname{sh}\beta t\right] =$$

$$= \frac{E_0}{R_1}\left\{1 - e^{-\lambda t}\left[\operatorname{ch}\beta t - \frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta(1-k^2)}\operatorname{sh}\beta t\right]\right\}.$$

β) Tranziens jelenségek elektromos távvezetékekben

I°. A (két hosszú paralel vagy koaxiális vezetőből álló) távvezetéket úgy tekinthetjük, mint egyenletesen eloszló ohmos ellenállások, induktivitások, kapacitások, átvezetések rendszerét; legyen ezek fajlagos (hosszegységre vonatkoztatott) nagysága rendre R, L, C, G (19. ábra).



19. ábra

Induljunk ki az $i(x, t)$ áram, az $u(x, t)$ feszültség, valamint ezek vezetékmenti (x szerinti) és időbeli (t szerinti) változási sebessége közötti összefüggést kifejező alábbi, ismert *alapegyenletek*ből:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t} + R\,i, \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial u}{\partial t} + G\,u. \tag{1a, b}$$

E lineáris elsőrendű parciális differenciálegyenlet-rendszer — pl. az (1b) x szerinti parciális differenciálása, majd az (1a) behelyettesítése útján — átírható a következő lineáris másodrendű parciális differenciálegyenletre, az ún. *távíró-egyenlet*re:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L\,C\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (C\,R + G\,L)\frac{\partial i}{\partial t} + R\,C\,i; \tag{2}$$

teljesen analóg egyenlet érvényes az u feszültségre. Minthogy fizikai okok miatt $L \geqq 0$, és $C \geqq 0$, azért — az e) δ) I° értelmében — a (2) egyenlet $L\,C > 0$ esetén hiperbolikus, $L\,C = 0$ esetén pedig parabolikus típusú.

II°. Figyelembe véve az e) δ) (13a, b) alatti $\mathfrak{L}$-transzformációs jelöléseket, eredményeket, valamint az $i(x, 0) = i_0$, $u(x, 0) = u_0$ kezdeti értékeket, az (1a, b) differenciálegyenlet-rendszer $\mathfrak{L}$-transzformáltjaként az

$$(L\,p + R)\,I = -\frac{dU}{dx} + L\,i_0, \qquad (C\,p + G)\,U = -\frac{dI}{dx} + C\,u_0 \qquad (3a, b)$$

operátoregyenlet-rendszert s ebből — az I kiküszöbölésével — a

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \gamma^2\,U = L\frac{di_0}{dx} - C(L\,p + R)\,u_0 \qquad (4a)$$

operátoregyenletet kapjuk, ahol

$$\gamma = \sqrt{(L\,p + R)\,(C\,p + G)} \qquad (5)$$

az ún. operátoros (hullám-) *terjedési együttható*. Null-feltéte ek ($i_0 = u_0 = 0$) esetén a (4a) a

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \gamma^2\,U = 0 \qquad (4b)$$

alakra egyszerűsödik. Ezen operátoregyenlet általános megoldásaként az *operátoros feszültség*

$$U = A\,e^{-\gamma x} + B\,e^{\gamma x} = A'\,\mathrm{ch}\,x + B'\,\mathrm{sh}\,\gamma\,x \qquad (6)$$

alakú, ahol A, B, A', B' a p-től függhet, de az x-től nem. Ezen együtthatók egyébként a (távvezeték végeire vonatkozó) kerületi feltételek alapján számíthatók ki.

Az U ismeretében az *operátoros áram* — a (3a) és az $i_0 = 0$ figyelembevételével —

$$I = -\frac{1}{L\,p + R}\frac{dU}{dx} = \frac{\gamma}{L\,p + R}(A\,e^{-\gamma x} - B\,e^{\gamma x}) = \frac{1}{Z}(A\,e^{-\gamma x} - B\,e^{\gamma x}) \qquad (7)$$

alakban nyerhető, ahol

$$K = \sqrt{\frac{L\,p + R}{C\,p + G}} \qquad (8)$$

az ún. operátoros *hullámellenállás*.

III°. A távvezeték egyenletének vizsgálata általános esetben jelentős nehézségekkel jár, ezért rendszerint *egyszerűsítő feltevések*kel élünk. Pl. feltesszük, hogy a távvezeték (célszerűen a pozitív x féltengely mentén) *végtelen*be nyúló. Minthogy U és I nem nőhet korlátlanul $x \to \infty$ esetén, azért kell hogy a (6) és (7) megoldásban $B = 0$ legyen (Re $\gamma > 0$ mellett); következésképpen ezek

$$U = U_1\,e^{-\gamma x}, \qquad I = I_1\,e^{-\gamma x} \qquad (9)$$

alakra egyszerűsödnek, ahol $U_1 = U(p, 0) = A$ és $I_1 = U_1/K$ a vezeték elején felvett értékek. Feltevésünk fizikailag a vezeték végéről visszaverődő hullámok elhanyagolását jelenti.

Szokásos még a távvezeték egyes jellemzőinek *elhanyagolása* (pl. $R = G = 0$), vagy közöttük bizonyos összefüggés megszabása (pl. $R\,C = L\,G$). Néhány ilyen speciális esetet példaként tárgyalunk.

IV°. Ha a távvezeték *véges* (pl. a $0 \leqq x \leqq l$ szakasz menti) kiterjedésű, akkor a (6) és (7) általános megoldásokból az $U(p, l) = U_2(p)$, $I(p, l) = I_2(p)$ *kerületi feltételek*nek eleget tevő partikuláris megoldások — ellenőrizhetően —

$$U = U_2 \operatorname{ch} \gamma(l - x) + K I_2 \operatorname{sh} \gamma(l - x),$$

$$I = \frac{U_2}{K} \operatorname{sh} \gamma (l - x) + I_2 \operatorname{ch} \gamma(l - x) \tag{10a, b}$$

alakban állíthatók elő. Ezekből a vezeték elején felvett értékek

$$U_1 = U(p, 0) = U_2 \operatorname{ch} \gamma l + K I_2 \operatorname{sh} \gamma l,$$

$$I_1 = I(p, 0) = \frac{U_2}{K} \operatorname{sh} \gamma l + I_2 \operatorname{ch} \gamma l \tag{11a, b}$$

módon nyerhetők.

Az U_1, U_2, I_1 és I_2 összefüggésbe hozható az U_g operátoros *generátorfeszültség*gel, a (generátorra és csatlakozó elemeire vonatkozó) Z_1 *kezdeti* és a (távvezetéket lezáró) Z_2 *végső* operátoros *impedancia*val, mégpedig

$$U_g = U_1 + I_1 Z_1, \quad U_2 = I_2 Z_2 \tag{12a, b}$$

módon. Ezek és a (11a, b) összefüggések segítségével a vezetékvégi operátoros áram és feszültség

$$I_2 = \frac{U_g}{(Z_1 + Z_2) \operatorname{ch} \gamma l + \left(K + \frac{Z_1 Z_2}{K}\right) \operatorname{sh} \gamma l} = \frac{U_2}{Z_2} \tag{13a, b}$$

alakban fejezhető ki. Ez utóbbiak felhasználásával az x helyre vonatkozó operátoros feszültség és áram (10a, b) kifejezése

$$U = U_g \frac{Z_2 \operatorname{ch} \gamma (l - x) + K \operatorname{sh} \gamma (l - x)}{(Z_1 + Z_2) \operatorname{ch} \gamma l + \left(K + \frac{Z_1 Z_2}{K}\right) \operatorname{sh} \gamma l},$$

$$I = U_g \frac{\operatorname{ch} \gamma (l - x) + \frac{Z_2}{K} \operatorname{sh} \gamma (l - x)}{(Z_1 + Z_2) \operatorname{ch} \gamma l + \left(K + \frac{Z_1 Z_2}{K}\right) \operatorname{sh} \gamma l} \tag{10c, d}$$

alakot ölt. Ezek fontos speciális esetekben, pl. ideális, valamint torzításmentes vezeték esetén (midőn K és γ a p változóban nem irracionális) ún. meroform függvények, s mint ilyenek, az általánosított második kifejtési tétel [*d) ε)* III°] segítségével invertálhatók.

V°. Áttekinthetőbb és szemléletesebb eredményhez jutunk, ha a ch és sh függvény exponenciális alakját, valamint az

$$r_1 = \frac{Z_1 - K}{Z_1 + K}, \quad r_2 = \frac{Z_2 - K}{Z_2 + K} \tag{14a, b}$$

*reflexiós együtthatók*at bevezetve, a (10c, d)-t átírjuk

$$U = U_g \frac{K}{Z_1 + K} \frac{e^{-\gamma x} + r_2 e^{-\gamma(2l-x)}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\gamma l}},$$

$$I = U_g \frac{1}{Z_1 + K} \frac{e^{-\gamma x} - r_2 e^{-\gamma(2l-x)}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\gamma l}} \qquad (10e, f)$$

alakra, majd — az

$$\frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{-2\gamma l}} = \sum_{k=0}^{\infty} (r_1 r_2)^k e^{-2\gamma k l}, \quad |r_1 r_2 e^{-2\gamma l}| < 1 \qquad (14)$$

geometriai sor igénybevételével —

$$U = \frac{U_g K}{Z_1 + K}[e^{-\gamma x} + r_2 e^{-\gamma(2l-x)} + r_1 r_2 e^{-\gamma(2l+x)} + r_1 r_2^2 e^{-\gamma(4l-x)} + r_1^2 r_2^2 e^{-\gamma(4l+x)} + \ldots],$$

$$I = \frac{U_g}{Z_1 + K}[e^{-\gamma x} - r_2 e^{-\gamma(2l-x)} + r_1 r_2 e^{-\gamma(2l+x)} - r_1 r_2^2 e^{-\gamma(4l-x)} + r_1^2 r_2^2 e^{-\gamma(4l+x)} + \ldots]$$

végső alakra hozzuk.

Példák

1. *Hullámterjedés végtelen, ideális távvezeték mentén.* A távvezetéket akkor mondjuk ideálisnak, ha

$$R = G = 0.$$

Ez esetben az (5) operátoros terjedési együttható és a (8) operátoros hullámellenállás

$$\gamma = p\sqrt{LC}, \qquad K = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

alakra egyszerűsödik. Az operátoros feszültség és áram (9) kifejezése most

$$U = U_1 e^{-p\sqrt{LC}x}, \qquad I = \sqrt{\frac{C}{L}} U_1 e^{-p\sqrt{LC}x}$$

alakot ölt, ahol $U_1 = U(p, 0)$. Az eltolási tétel [*d) γ)* I°] felhasználásával operátoros függvényeink inverze, vagyis az időbeli feszültség és áram a következőképpen adódik:

$$u(x, t) = u(0, t - \sqrt{LC}\,x) = u\left(0, t - \frac{x}{v}\right),$$

$$i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}}\, u\left(0, t - \frac{x}{v}\right), \qquad t > \frac{x}{v}.$$

Ezek szerint a távvezeték elejére rávitt tetszőleges alakú feszültség- és áramhullám csillapítás- és torzításmentesen, $v = 1/\sqrt{LC}$ sebességgel halad a távvezeték mentén.

2. *Hullámterjedés végtelen, torzításmentes távvezeték mentén.* A távvezetéket

$$RC = GL, \quad \text{azaz} \quad \frac{R}{L} = \frac{G}{C} = \alpha$$

esetben nevezzük torzításmentesnek; (mint látni fogjuk, az elnevezés indokolt). Ekkor a vezeték operátoros terjedési együtthatója és hullámellenállása

$$\gamma = \frac{1}{v}(p + \alpha), \qquad K = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

módon, operátoros feszültsége és árama pedig

$$U = U(p, 0)\, e^{-\frac{\alpha x}{v}} e^{-\frac{px}{v}}, \qquad I = \sqrt{\frac{C}{L}}\, U(p, 0)\, e^{-\frac{\alpha x}{v}} e^{-\frac{px}{v}}$$

módon alakul. Ezeket az eltolási tétel segítségével invertálva (a p-től független $e^{-\frac{\alpha x}{v}}$ faktorral), az időbeli feszültség és áram így alakul:

$$u(x, t) = e^{-\frac{\alpha x}{v}}\, u\left(0, t - \frac{x}{v}\right), \quad i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}}\, e^{-\frac{\alpha x}{v}}\, u\left(0, t - \frac{x}{v}\right),$$

ahol $t > x/v$. Ezek szerint a feszültség- és áramhullámok alakhűen, de csillapítva terjednek tova a távvezeték mentén.

3. *Hullámterjedés végtelen kábel mentén.* A föld és víz alatti kábelben a vezetők közelsége és a jó szigetelés következtében jó közelítéssel

$$L = G = 0.$$

Ekkor a kábel operátoros jellemzői

$$\gamma = \sqrt{RCp}, \qquad K = \sqrt{\frac{R}{Cp}},$$

$$U = U_1\, e^{-\sqrt{RCp}\, x}, \qquad I = \sqrt{\frac{Cp}{R}}\, U_1\, e^{-\sqrt{RCp}\, x}$$

alakúak. Ha speciálisan $U_1 = U(p, 0) = E_0/p$, akkor az utóbbiak — a d) δ) — ζ) 4. B) példa alapján ($\alpha = \sqrt{RC}\, x$) — közvetlenül invertálhatók, s így

$$u_1(x, t) = E_0\, \mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right), \quad i_1(x, t) = E_0 \sqrt{\frac{C}{R\pi t}}\, e^{-\frac{RCx^2}{4t}}$$

alakban nyerjük az időbeli feszültséget és áramot.

Szembetűnő, hogy e feszültségeloszlás hasonló a δ) 1. példában nyert $u_1(x, t)$ hőfokeloszláshoz ($a = 1/\sqrt{RL}$); így tetszőleges $u(t, 0) = f(t)$ kerületi feltétel esetén is az ottani $u(x, t)$ hőfokeloszláshoz hasonló

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2 RC}{4t\xi^2}\right) e^{-\xi^2}\, d\xi$$

feszültségeloszlást kapunk.

4. *Végtelen kábel, Z_1 belső operátoros impedanciájú generátorra kapcsolva.* Ekkor az $U_g(p, 0)$ generátorfeszültség $I_1(p, 0)\, Z_1(p)$ feszültségesséssel csökkenve adja a kábel eleji $U(p, 0)$ feszültséget, azaz — a (12a) szerint, $U_1 = U(p, 0)$, $I_1 = I(p, 0)$ jelöléssel —

$$U_g = U_1 + I_1 Z_1,$$

valamennyit operátorosan értve. Ez utóbbi egyenlet — a 3. példabeli operátoros feszültség és áram felhasználásával —

$$U_g = U_1 \left(1 + Z_1 \sqrt{\frac{C p}{R}}\right)$$

alakot ölt, amelyből U_1 kifejezhető.

Legyen például $U_g = E_0/p$ és $Z_1 = R_1$; akkor a $\beta = R/C R_1^2$ és $\alpha = x \sqrt{R C}$ jelölés bevezetésével és U_1 most említett kifejezésével az operátoros feszültség

$$U = U_1 e^{-\sqrt{RCp}\, x} = \frac{U_g}{1 + Z_1 \sqrt{\frac{C p}{R}}} e^{-\sqrt{RCp}\, x} = \frac{E_0\, e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p\left(1 + \sqrt{\frac{p}{\beta}}\right)} =$$

$$= \frac{E_0\, e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p} - \frac{E_0\, e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}\,(\sqrt{\beta} - \sqrt{p})}$$

módon alakul.

Az inverzió előkészítésére megállapíthatjuk, hogy

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{E_0\, e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}\right] = E_0 \operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right), \qquad \mathfrak{L}^{-1}[F(p)] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{E_0\, e^{-\alpha t}}{\sqrt{\beta} + p}\right] =$$

$$= E_0\, e^{-\sqrt{\beta}(t-\alpha)} \cdot 1(t - \alpha),$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}\right] = \frac{E_0}{\sqrt{\pi t}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\sqrt{\beta}(\tau-\alpha) - \frac{\tau^2}{4t}}\, d\tau = \frac{2 E_0}{\sqrt{\pi}}\, e^{\alpha\sqrt{\beta} + t\beta} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t\beta}}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi =$$

$$= E_0\, e^{2\sqrt{\beta} + t\beta} \operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t\beta}\right);$$

az utóbbi esetben Efrosz tételét [*d) ô)* I°] alkalmaztuk, és $\xi = \frac{\tau}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t\beta}$ helyettesítéssel éltünk. Végeredményben az időbeli feszültség így alakul:

$$u(x, t) = E_0 \operatorname{Erf}\left|\frac{x}{2}\sqrt{\frac{R C}{t}}\right| - E_0\, e^{x\frac{R}{R_1} + \beta t} \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{R C}{t}} + \sqrt{\beta t}\right).$$

A fentiek és a 3. példa alapján az operátoros áram kifejezése

$$I = \sqrt{\frac{C p}{R}}\, U_1\, e^{-\sqrt{RCp}\, x} = \sqrt{\frac{C p}{R}}\, \frac{E_0\, e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p\left(1 + \sqrt{\frac{p}{\beta}}\right)} = \frac{E_0}{R_1}\, \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}\,(\sqrt{\beta} + \sqrt{p})}$$

alakban, időbeli kifejezése pedig

$$i(x,t) = \frac{E_0}{R_1} e^{x\frac{R}{R_1}+\beta t} \operatorname{Erf}\left|\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{2}} + \sqrt{\beta t}\right|$$

alakban nyerhető.

5. *Véges ideális, a végén nyitott távvezeték gyakorlatilag zérus belső impedanciájú generátorra kapcsolva.* Esetünkben

$$Z_1 = 0, \qquad U_g = U_1, \qquad Z_2 = \infty,$$

tehát a (10c, d) formulák — számlálójuk és nevezőjük Z_2-vel való osztása és $Z_2 \to \infty$ határátmenet után, $U_1 = E_0/p$ feltevéssel —

$$U = \frac{E_0}{p}\frac{\operatorname{ch}\gamma(l-x)}{\operatorname{ch}\gamma l}, \qquad I = \frac{E_0}{p}\frac{\operatorname{sh}\gamma(l-x)}{K\operatorname{ch}\gamma l}$$

alakot öltenek, ahol most — az 1. példa értelmében —

$$\gamma = p\sqrt{LC} = \frac{p}{v}, \qquad K = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Az U és I egyaránt meromorf függvény, s így invertálásuk általánosított második kifejtési tétel alapján eszközölhető. A nevezők zérushelyei ($\operatorname{ch}\gamma l = \cos i\gamma l$ figyelembevételével) a következők:

$$p_1 = 0, \quad q_k = v\gamma_k = i\frac{v}{l}(2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

ahol nyilván $q_{-(k+1)} = \bar{q}_k$. Felhasználva az U-val kapcsolatban az

$$M(p) = E_0 \operatorname{ch}\frac{p}{v}(l-x), \quad M(0) = E_0, \quad M(q_k) = E_0 \cos\frac{\pi}{2l}(2k+1)(l-x),$$

$$N(p) = pL(p) = p\operatorname{ch}\frac{l}{v}p, \qquad L(0) = 1, \quad L'(p) = \frac{l}{v}\operatorname{sh}\frac{l}{v}p = -i\frac{l}{v}\sin i\frac{l}{v}p,$$

$$q_k L'(q_k) = -(2k+1)\frac{\pi}{2}\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{k+1}(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

adatokat, az U inverze, vagyis az időbeli feszültség így alakul:

$$u(x,t) = E_0 + 2\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}E_0 \frac{\cos\frac{\pi}{2l}(2k+1)(l-x)}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{v}{l}(2k+1)\frac{\pi}{2}t} =$$

$$= E_0\left[1 - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos\frac{\pi}{2l}(2k+1)(l-x)\cdot\cos\frac{v\pi}{2l}(2k+1)t\right],$$

ahol az összegezés a pozitív képzetes részű q_k-kra vonatkozott.

Hasonló módon az időbeli áramra a következő eredményt kapjuk:

$$i(x, t) = \frac{4 E_0}{\pi K} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \sin \frac{\pi}{2l} (2k+1)(l-x) \cdot \sin \frac{v\pi}{2l} (2k+1)\, t.$$

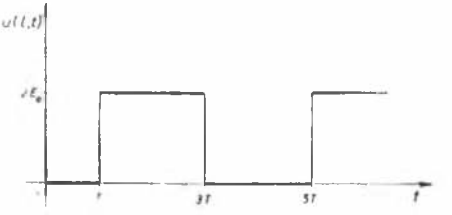
Áttekinthetőbb megoldást kapunk a (10g, h) egyenletek alapján. Egyszerűség kedvéért szorítkozzunk a feszültség vezetékvégi értékének kiszámítására. Az operátoros feszültség értéke az $x = l$ helyen nyilván

$$U(l, p) = \frac{2 E_0}{p} \left| e^{-p\frac{l}{v}} - e^{-p\frac{3l}{v}} + e^{-p\frac{5l}{v}} - + \ldots \right|,$$

a megfelelő időbeli feszültségé tehát — a $T = l/v = l\sqrt{L C}$ jelölés alkalmazásával —

$$u(l, t) = 2 E_0 [1(t - T) - 1(t - 3T) + 1(t - 5T) - + \ldots];$$

eszerint a feszültség a $(T, 3T)$, $(5T, 7T)$, ... időszakokban $2E_0$, a $(0, T)$, $(3T, 5T)$, ... időszakokban pedig zérus értékű a vezeték végén (20. ábra).



20. ábra

A kifejtési tétellel fentebb nyert $u(x, t)$ függvény $x = l$-nél adódó

$$u(l, t) = E_0 \left| 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos \frac{\pi}{2T} (2k+1)\, t \right|$$

kifejezése nyilván úgy tekinthető, mint az ábrázolt függvény FOURIER-sora.

B) rész

SPECIÁLIS FÜGGVÉNYEK

ÍRTA:

DR. FREY TAMÁS

EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

2. §. NÉHÁNY FONTOS FÜGGVÉNYTANI FOGALOMRÓL

a) Függvények analitikus folytatása

α) **Néhány elnevezés** Az $f(z)$ függvény valamely T tartományban *reguláris* (gyakran a *holomorf* elnevezést is használják), ha $f(z)$ e tartományban *egyértékű*, és minden pontban *differenciálható*.

Az $f(z)$ függvény a $z = a$ pontban *analitikus*, ha e pontban végtelen sokszor differenciálható és e differenciálhányadosok segítségével — formálisan — képzett TAYLOR-*sor* az a pont körül valamely $\varrho > 0$ sugárral írt *kör belsejében* az $f(z)$ függvényt *állítja elő*.

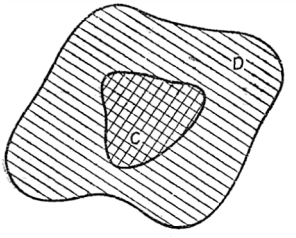
Az $f(z)$ függvény valamely T tartományban analitikus, ha e tartomány minden pontjában analitikus.

A komplex függvénytan egyik alapvető tétele szerint valamely tartományban reguláris függvény ott egyszersmind analitikus is. Megjegyezzük, hogy e tétel általában nem fordítható meg, éspedig azért nem, mert az analitikus függvények nem szükségképp egyértékűek.

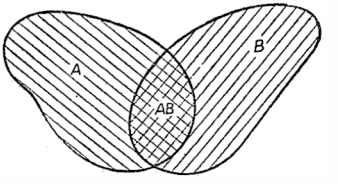
β) **Az analitikus folytatásról** Legyen $f(z)$ a C tartományban reguláris, D pedig egy C-t (belsejében) tartalmazó, azzal azonban nem megegyező tartomány. Felmerül a kérdés, található-e olyan $f^*(z)$ függvény, amely D-ben reguláris, C-ben pedig megegyezik $f(z)$-vel, s ha igen, vajon csak egyetlen ilyen függvény létezik-e?

E kérdés eldöntésében nagy segítségünkre van az alábbi tétel:

Amennyiben a $g(z)$ függvény valamely D tartományban reguláris, és D valamely részтartományában, C-ben (21. ábra) azonosan eltűnik, akkor e függvény D minden pontjában a 0 értéket veszi fel.



21. ábra



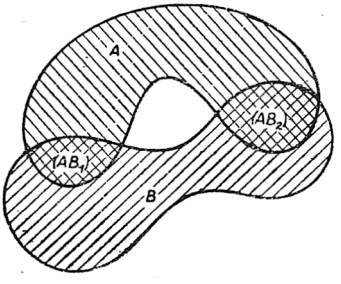
22. ábra

E tétel alapján ti. azonnal belátható, hogy csak egyetlen olyan $f^*(z)$ függvény létezhet, amely a bevezetésben említett követelményt kielégíti. Ha valóban létezik e függvény, akkor azt az $f(z)$ függvény analitikus folytatásának nevezzük (a D tartományban).

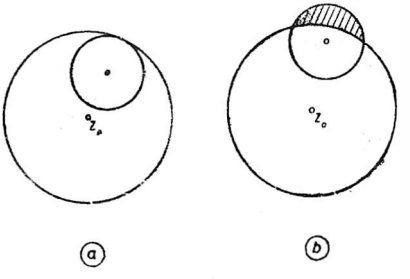
Kissé általánosabban is felvethetjük a kérdést. Tegyük fel, hogy az A és B tartományok közös része maga is tartomány, amelyet AB-vel jelölünk (22. ábra). Legyen $f(z)$ az A, $g(z)$ pedig a B tartományban reguláris, AB-ben pedig egyezzék meg a két függvény egymással azonosan. Ez esetben e két függvényt egymás analitikus folytatásának nevezzük; ezek egymást egyértelműen határozzák meg (ez ismét az előbb említett tételből olvasható ki közvetlenül). Az a $h(z)$ függvény, amelyet úgy definiálunk, hogy A-ban $f(z)$-vel, B-ben pedig $g(z)$-vel egyezzék meg, nyilván reguláris a teljes, A, illetve B által lefedett tartományban.

Tekintsünk most két olyan tartományt, A-t és B-t, amelyek közös része két tartományból áll: $(AB)_1$-ből és $(AB)_2$-ből (23. ábra). Legyen $f(z)$ egy, az A-ban, $g_1(z)$, illetve $g_2(z)$ pedig egy-egy, a B-ben reguláris függvény. Emellett $f(z)$ és $g_1(z)$ egyezzenek meg egymással azonosan az $(AB)_1$ tartományban, hasonlóan $f(z)$ és $g_2(z)$ az $(AB)_2$-ben. Mármost két eset lehetséges: $g_1(z)$ és $g_2(z)$ vagy azonosan megegyeznek, vagy nem. Utóbbi esetben $g_1(z)$-t is, $g_2(z)$-t is $f(z)$ analitikus folytatásának nevezzük.

Azt a kétértékű $f^*(z)$ függvényt pedig, amely B-ben vagy $g_1(z)$-vel, vagy $g_2(z)$-vel, A-ban pedig $f(z)$-vel egyezik meg, (egyetlen) analitikus függvénynek tekintjük, illetve nevezzük.



23. ábra



24. ábra

Valamely reguláris függvény analitikus folytatása, és főleg annak elvi eldöntése hogy az eredeti definíciós tartományon túl egyáltalán folytatható-e analitikusan a tekintett függvény, legegyszerűbben a Taylor-sorfejtés segítségével történhet. Tegyük ugyanis fel, hogy $f(z)$ az A tartományban reguláris függvény. Ekkor egyszersmind analitikus is e tartományban, s így bármely pontjában TAYLOR-sorba fejthető. Legyen z_0 pontja A-nak. Fejtsük e pontban sorba $f(z)$-t. E sor egy körben konvergál, s itt egy analitikus függvényt állít elő. Ez utóbbi függvény a konvergenciakör bármely belső pontjában ismét hatványsorba fejthető. Minthogy a hatványsorok konvergenciakörének kerületén legalább egy szinguláris pontnak kell lennie, azért ez utóbbi hatványsor konvergenciaköre vagy érinti, vagy metszi az előbbi hatványsor konvergenciakörét (24. ábra *a)*, illetve *b)* eset). Utóbbi esetben a második körnek van olyan része, amely nem esik bele az első hatványsor konvergenciakörébe, azaz e tartományban a második hatványsor által definiált függvény az első hatványsor által definiált függvénynek [amely konvergenciakörében nyilván $f(z)$-vel egyezik] analitikus folytatása. Ezen

eljárást vég nélkül és megfelelő módon folytatva, a sík bizonyos részét (természetesen többszörösen) lefedjük a TAYLOR-sorok konvergenciaköreivel. Az így lefedett terület az a tartomány, amelyben az eredetileg megadott függvény analitikusan folytatható, az egyes TAYLOR-sorokat pedig az (analitikus folytatás révén nyert) analitikus függvény *függvényelemei*nek nevezzük. A függvény egy-, vagy többértékű attól függően, hogy bármely pontot tekintünk is (mindegyik pont végtelen sok függvényelem konvergenciaköréhez tartozik), minden függvényelem ugyanazt az értéket veszi-e fel e pontban, vagy sem.

γ) A permanencia-tétel

A későbbiek szempontjából alapvetően fontos a következő (ún. permanencia-) tétel: Legyen $f(z)$ a T tartományban analitikus függvény, amelynek egyik függvényeleme, $f_1(z)$ kielégít egy differenciálegyenletet:

$$F(z;\ y;\ y';\ \ldots;\ y^{(n)}) = 0,$$

ahol F mindegyik változójának, éspedig z-nek a T tartományban, y-nek a C, általában $y^{(k)}$-nak a $C^{(k)}$ tartományban reguláris függvénye. Itt C jelenti a T tartománynak az f függvény által, illetve általában $C^{(k)}$ az $f^{(k)}$ függvény által leképezett képét. Ez esetben az adott differenciálegyenletet az $f(z)$ függvény minden függvényeleme kielégíti a T tartomány azon részében, ahol értelmezve van.

b) Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok

Bevezetőül megjegyezzük, hogy a sorozatokkal, sorokkal, illetve szorzatokkal kapcsolatos tételek, csaknem kivétel nélkül változatlanok maradnak, ha valós mennyiségekről komplex mennyiségekig bővítjük az értelmezési tartományt. Az előbbieket ismertnek tekintjük — a sorozatban megjelent B. VI. kötetre is tekintettel —, ezért csak néhány olyan tételt emelünk ki, melyek alakja megváltozik az értelmezési tartomány bővítésekor. Így pl. nem érvényes komplex tagú sorok esetén az a valósból ismert tétel, mely szerint egy feltételesen konvergáló sor mindig átrendezhető tetszőleges összegű (természetesen továbbra is csak feltételesen konvergáló) sorrá. Útmutatásul itt csak egy megjegyzést teszünk, a részletekkel a feladatok között foglalkozunk: lehetséges ugyanis, hogy a feltételesen konvergáló sor tagjainak pl. a valós része abszolút konvergens sort ad, képzetes része viszont nem. Érvényes azonban az alábbi tétel:

Ha egy sor tagjainak valós részéből alkotott sor is, képzetes részéből alkotott sor is abszolút konvergens, akkor az eredeti sor is abszolút konvergál.

A CAUCHY-féle integrálképlet következménye a WEIERSTRASS-féle ún. kettőssor-tétel, amely — az előzőkkel szemben — valósban nem — pontosabban csak hatványsor-analógiában — érvényes:

Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ sor tagjai a T tartományban, sőt az azt határoló g zárt JORDAN-görbén is reguláris függvények, továbbá, hogy a sor a g görbén egyenletesen konvergál. Ez esetben a sor az egész T tartományban egyenletesen konvergál, összege T-ben reguláris függvény, maga a sor pedig T-ben tagonként (akárhányszor) differenciálható.

Hasonló tétel érvényes a szorzatokra is, ezzel azonban csak a feladatok között foglalkozunk.

c) A meromorf függvények és részlettört-előállításuk

α) Meromorf függvények

Azokat a függvényeket, amelyek *izolált* pólusok kivételével az egész számsíkon regulárisak, meromorf függvényeknek nevezzük. Azt a tényt, hogy a pólushelyek izoláltak, másként úgy is kifejezhetjük, hogy e függvényeknek bármely véges tartományban csak véges számú szinguláris helyük — éspedig pólusuk — van. A legegyszerűbb felépítésű meromorf függvények a racionális (tört) függvények. Ezeknek véges számú pólusuk van az egész síkon. A legáltalánosabb meromorf függvényeknek természetesen végtelen sok pólushelyük lehet, ezek azonban nyilván sehol sem sűrűsödhetnek. Ilyen függvény pl.: $\frac{1}{z}$; tg z stb.

β) A MITTAG–LEFFLER-féle részlettört-előállítás

Ismeretes, hogy a legegyszerűbb típusú meromorf függvények, a racionális függvények részlettörtek összegeként is felírhatók. A részlettörtes előállítás — most nem tekintve a gyakorlatban használt eljárásokra — elvileg így történhet: Nevezzük *főrésznek* — pontosabban a $z = a$ szinguláris helyhez tartozó Laurent-sorba fejtés főrészének — e sorfejtés negatív exponensű tagjainak összegét; ez tehát $\frac{1}{z-a}$-nak állandó tag nélküli polinomja, feltéve, hogy a kérdéses helyen a sorba fejtett függvénynek pólusa van.* Azonnal belátható, hogy a racionális függvény összes végesben levő pólushelyein vett főrészeinek összege a racionális függvénytől legfeljebb egy polinomban különbözhet, azaz a főrészek összege megadja a részlettört-előállítás valamennyi törtjét. Megjegyezzük, hogy ha ehhez hozzávesszük a végtelen távoli ponthoz tartozó főrészt is, a két függvény különbsége — a LIOUVILLE-tétel szerint — egy állandó.

Természetszerűen vetődik fel az a kérdés, hogy vajon a legáltalánosabb meromorf-függvények is előállíthatók-e a racionális törtfüggvények mintájára részlettört alakban, pontosabban szólva az egyes pólusokhoz tartozó főrészek összegeként. A kérdést azonban kissé precízebben kell felvetnünk, minthogy általában végtelen sok pólushelyre számíthatunk (sőt a végtelen távoli pontban ez esetbenlényeges szingularitásra**), a főrészek összege tehát általában végtelen sor lesz, amelytől értelemszerűen nem követeljük meg az abszolút konvergenciát. Ezért elsősorban a főrészek összegezésének sorrendjében állapodunk meg, éspedig úgy, hogy a pólushelyeket növekvő abszolút érték szerint rendezzük (az azonos abszolút értékű pólushelyek rendezése — egy-egy csoportban csak véges számú lehet — tetszőlegesen, pl. növekvő argumentum szerint történhet), és ugyanebben a sorrendben tekintjük a főrészeket.

Megjegyezzük továbbá, hogy a főrészekhez a konvergencia biztosítása céljából szükség esetén polinomokat hozzáfűzhetünk, hiszen már a racionális függvények részlettörtes előállításánál is láttuk, hogy a főrészek összege a tekintett függvénytől egy polinomban különbözni szokott. A legnagyobb nehézséget az általános esetben is a főrészek (és esetleg hozzájuk tartozó polinomok) összegéhez fűzendő, az egész síkon reguláris függvény megállapítása jelenti, amelyet elvileg — épp úgy, mint a racionális

* Megjegyezzük, hogy a végtelen távoli pontban is beszélhetünk a sorfejtés főrészéről: ez nyilván $\frac{1}{z}$ negatív hatványai, azaz z pozitív hatványaihoz tartozó tagok összege.

** Emlékeztetünk arra, hogy pólushelyek (és ugyanúgy zérushelyek) sűrűsödési pontja lényegesen szinguláris pont.

függvények részlettört-előállításánál — a végtelen távoli ponthoz tartozó főrész vizsgálatával lehet csak megállapítani.

Ezt azonban bizonyos esetekben az

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n}\frac{f(t)}{t-z}\frac{z^m}{t^m}\,dt$$

CAUCHY-típusú integrál vizsgálatával el lehet kerülni, ahol $\{C_n\}$ a zárt JORDAN-görbék egy olyan sorozata, amelyek közül az n-edik épp az $f(z)$ meromorf függvény első n pólushelyét zárja körül, és amelyeknél a körülzárt terület és a kerület négyzetének viszonya két korlát között marad (l. pl. HURWITZ—COURANT: Funktionentheorie).

Három tételt adunk meg a következőkben, közülük az első kettőt épp a fenti integrál vizsgálatából nyerhetjük. Ezt megelőzően azonban néhány jelölésben megállapodunk: jelöljük a tekintett meromorf függvényt $f(z)$-vel. Az első két tételnél feltesszük, hogy a függvény a $z = 0$ helyen reguláris (általános esetben a 0 helyhez tartozó főrészt levonjuk az eredeti függvényből, és a különbséget bontjuk „részlettörtekre"). A pólushelyek legyenek rendre:

$$|a_1| \leqq |a_2| \leqq \ldots \leqq |a_n| \leqq \ldots$$

a hozzájuk tartozó főrészeket pedig így jelöljük:

$$F_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right).$$

Mármost az első tétellel kapcsolatban tegyük fel, hogy található a $\{C_n\}$ zárt JORDAN-görbék egy olyan sorozata, amelyre:

1°. C_n körülzárja az első n pólushelyet, de csakis ezeket.

2°. A C_n görbék által körülzárt terület és a kerület négyzetének viszonya két pozitív korlát között marad.

3°. $|f(z)|$ maximumát a C_n görbén F_n-nel jelölve, az $\{F_n\}$ sorozat korlátos:

$$F_n \leqq M \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ez esetben érvényes az egész számsíkon a következő „részlettört-előállítás":

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[F_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - F_k\left(-\frac{1}{a_k}\right)\right].$$

A második tétellel kapcsolatban viszont azt tételezzük fel, hogy található a $\{C_n\}$ zárt JORDAN-görbék egy olyan sorozata, továbbá egy olyan p természetes szám, hogy az előző tétel első két feltétele ismét teljesüljön, ellenben 3° helyett a gyengébb

3°°. $$F_n^{(p)} \leqq M \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

feltétel érvényes, ahol $F_n^{(p)}$ az $\left|\frac{f(z)}{z^p}\right|$ függvény maximumát jelöli a C_n görbe mentén. Ez esetben az alábbi „részlettört-előállítás" érvényes az egész számsíkon:

$$f(z) = M_p(z;\, f) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[F_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - M_p(z;\, F_k)\right],$$

ahol $M_p(z;\, f)$ az $f(x)$ függvény MACLAURIN sorfejtésének p-ed rendű szeletét jelöli.

Végül a harmadik tétellel kapcsolatban válasszunk egy pozitív tagú konvergens sort és egy 1-nél nagyobb számot. Legyenek ezek pl.

$$\varepsilon_k \geqq 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty \quad \text{és} \quad 1 < \varrho.$$

Ez esetben az egész számsíkon érvényes az alábbi „részlettört-előállítás" (MITTAG—LEFFLER):

$$f(z) = F_0\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[F_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - M_{p_k}(z; F_k)\right] + E(z),$$

ahol $M_{p_k}(z; F_k)$ az $F_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$ főrész MACLAURIN sorfejtésének (p_k-ad rendű) olyan szeletét jelenti, amelyre érvényes az

$$\left|F_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - M_{p_k}(z; F_k)\right| \leqq \varepsilon_k, \quad \text{hacsak} \quad |z| \leqq \frac{|a_k|}{\varrho}$$

becslés, $F_0\left(\frac{1}{z}\right)$ a $z = 0$ helyhez tartozó főrészt (amennyiben $f(z)$-nek az origo pólusa), végül $E(z)$ egy az egész síkon reguláris (ún. egész) függvényt jelöl. $E(z)$ megállapítása, mint említettük, a végtelen távoli ponthoz tartozó főrész vizsgálatával történhetik, és igen nehéz feladatot jelent.

d) Egész függvények és szorzat-előállításuk

α) **Egész függvények** Az egész számsíkon értelmezett és *mindenütt reguláris* függvényeket *egész függvények*nek nevezzük. Ezeknek a függvényeknek tehát csak a végtelen távoli pontban lehet szingularitásuk. Ha itt sincs, akkor a LIOUVILLE-tétel értelmében a függvény azonosan állandó. Ha az egész függvénynek a végtelen távoli pont pólusa, akkor a függvény racionális egész függvény, más szóval polinom. Végül transzcendensnek nevezzük az egész függvényt, ha a végtelen távoli pontban lényegesen szinguláris helye van.

A definícióból következik, hogy az egész függvények bármely pontban TAYLOR-sorba fejthetők, továbbá, hogy e sorok — speciálisan tehát MACLAURIN-soruk is — az egész síkon a sorba fejtett függvényt állítják elő.

β) **A WEIERSTRASS-féle szorzatelőállítás** A racionális egész függvényeket 0 helyeik egy konstans faktortól eltekintve meghatározzák. Erre támaszkodik a polinomok jól ismert gyöktényezős alakban történő előállítása. A legáltalánosabb egész függvényeket azonban 0 helyeik már nyilván nem határozzák meg fenti értelemben, hiszen pl. az e^z vagy $e^{\sin z}$ egész függvényeknek egyetlen 0 helyük sincs. Érvényes ellenben egyrészt az a tétel, hogy bármely 0 hely nélküli $f(z)$ egész függvény $e^{g(z)}$ alakban írható fel, ahol $g(z)$ maga is egész függvény — ez $f(z)$ logaritmikus deriváltjának vizsgálatából azonnal kiderül — másrészt az is, hogy bármely egész függvény — egy 0 hely nélküli egész függvénytől mint faktortól eltekintve — gyöktényezőinek szorzataként előállítható. Ha végtelen sok 0 helye van az egész függvénynek, akkor egyrészt a gyöktényezők rendezésében ugyanolyan

típusú megállapodást kell bevezetnünk, mint a meromorf függvényeknél, másrészt a végtelen szorzat konvergenciájának biztosítására az egyes gyökтényezőkhöz — szükség esetén — $e^{P(z)}$ típusú faktorokat fűzhetünk, ahol $P(z)$ valamilyen polinom. Megjegyezzük továbbá, hogy egyrészt az egész függvényeknek bármely véges tartományban csak véges számú 0 helyük lehet*, másrészt, hogy valamely egész függvény logaritmikus deriváltja nyilván meromorf függvény. Ez utóbbi megjegyzésből következik, hogy a MITTAG—LEFFLER-féle részlettört-előállítás problémájára vissza lehet vezetni az egész függvények „gyöktényezős" előállítását, továbbá, hogy 3 ugyanolyan típusú tételt adhatnánk meg közvetlenül, mint amilyent a meromorf függvényekkel kapcsolatban adtunk meg. Ezeket azonban nem részletezzük, hanem helyette egy, a gyakorlatban szinte mindig alkalmazható, az előzőkhöz hasonló típusú tételt ismertetünk. Tegyük fel tehát, hogy az $f(z)$ egész függvény 0 helyeit növekvő abszolút érték szerint rendeztük (amennyiben valamelyik gyök m-szeres, azt m-szer írjuk le (és indexeljük !); a 0 hely legyen p-szeres gyök):

$$0 < |a_1| \leqq |a_2| \leqq \ldots \leqq |a_n| \leqq \ldots$$

Tegyük fel továbbá, hogy megadható olyan $s \geqq 2$ természetes szám, amely mellett a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^s}$$

sor konvergens. Ez esetben az $f(z)$ egész függvény az egész számsíkon előállítható az alábbi „gyöktényezős" alakban:

$$f(z) = e^{g(z)} \cdot z^p \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \cdot e^{\frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{s-1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{s-1}},$$

ahol $g(z)$ maga is egész függvény; ez utóbbi konkrét megállapítása általában nehéz feladat, néha azonban a logaritmikus derivált felhasználásával a meromorf függvényekkel kapcsolatos első két tételre támaszkodva, aránylag könnyen elvégezhető. Ha a $\sum \frac{1}{|a_k|}$ sor konvergens, akkor:

$$f(z) \equiv e^{g(z)} \cdot z^p \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right).$$

e) Függvények aszimptotikus vizsgálata

α) Aszimptotikus sorok

Az

$$a_0 + a_1 \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + \ldots$$

végtelen sort az $f(z)$ függvény aszimptotikus sorának vagy aszimptotikus kifejtésének nevezzük az $\alpha \leqq \arg z \leqq \beta$ szögtérben [ezt a tényt az $f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu}$ jelöléssel fejezzük ki], ha

* L. a 99. lap lábjegyzetét.

1°. a sor z minden értékére *divergens;*

2°. S_n-nel jelölve a sor n-ed rendű szeletét, R_n-nel pedig a függvény és az n-edik részletösszeg eltérésének z^n-szeresét, azaz az

$$S_n(z) = a_0 + a_1 \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + \ldots + a_n \frac{1}{z^n}$$

és

$$R_n(z) = z^n\{f(z) - S_n(z)\}$$

jelöléseket használva, érvényes — elsősorban is — n bármely értékére az $\alpha \leqq \arg z \leqq \beta$ szögtérben választott úton a

$$\lim_{|z|\to\infty} R_n(z) = 0$$

követelmény, másrészt viszont bármely $\alpha \leqq \arg z \leqq \beta$ feltételt kielégítő z-re teljesül a

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(z)| = \infty$$

reláció.*

A megfelelő szögtérben tehát valamely függvény aszimptotikus sora alkalmas egyrészt arra, hogy a függvény viselkedését az argumentum nagy értékeire kvalitatíve jól jellemezze, másrészt arra is, hogy a nagy argumentumhoz tartozó függvényértékeket elég nagy (de — szemben a konvergens sorokkal történő közelítés esetével — *nem* tetszőlegesen nagy) pontossággal kvantitatíve is számítani tudjuk.

Megjegyezzük ezzel kapcsolatban először is, hogy valamely függvény egyértelműen definiálja — adott szögtérben — aszimptotikus sorának együtthatóit. Hiszen, ha egyidejűleg fennállanak az

$$f(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu} \quad \text{és} \quad f(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_\nu}{z^\nu}$$

relációk valamely szögtérben, akkor

$$\lim_{|z|\to\infty} z^n \left[(a_0 - b_0) + \frac{a_1 - b_1}{z} + \ldots + \frac{a_n - b_n}{z^n}\right] = 0$$

szükségképp n minden értékére teljesül, amiből következik, hogy

$$a_\nu \equiv b_\nu; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots .$$

Ezzel szemben viszont: 1. nem minden függvényhez adható meg aszimptotikus sor; 2. az aszimptotikus sorok nem jellemzik egyértelműen a megfelelő függvényt, hiszen pl. a $-\frac{\pi}{4} \leqq \arg z \leqq \frac{\pi}{4}$ szögtérben az $f(z)$ és az $f(z) + e^{-z}$ függvényeknek — ha egyáltalán létezik — ugyanaz az aszimptotikus kifejtésük.

A következőkben két fontos módszert ismertetünk, amelyekkel bizonyos függvények aszimptotikus viselkedését — esetleg aszimptotikus sorát is — vizsgálhatjuk.

* Gyakran használjuk az „aszimptotikus kifejtés" elnevezést a következő értelemben is: Ha az $f(z) - g(z)$, illetve $\frac{f(z)}{g(z)}$ aszimptotikus sora: $\sum \frac{a_n}{z^n}$, illetve $\sum \frac{b_n}{z^n}$, akkor a $g(z) + \sum \frac{a_n}{z^n}$, illetve $g(z) \cdot \sum \frac{b_n}{z^n}$ kifejezést $f(z)$ aszimptotikus kifejtésének nevezzük.

β) Az EULER-féle összegképlet

A BERNOULLI-féle függvények definícióját ismertetjük a következőkben, amelyek alapján származtatható az ún. EULER-*féle összegképlet*. Az n-edik BERNOULLI-féle polinom: $B_n^*(x)$, olyan pontosan n-ed fokú polinom, amelyre érvényesek a következő relációk:

$$1^\circ.\quad \frac{d}{dx} B_n^*(x) = (-1)^{n-1} B_{n-1}^*(x), \quad \text{ha} \quad n \geqq 1$$

és

$$2^\circ.\quad \int_0^1 B_n^*(x)\, dx = 0, \qquad \text{ha} \quad n \geqq 1,$$

emellett

$$B_0^*(x) \equiv -1.$$

A $B_n(x)$ BERNOULLI-féle függvények egységnyi periódusú függvények, amelyek a $[0, 1)$ szakaszon a $B_n^*(x)$ polinomokkal egyeznek. FOURIER-soros előállításuk is jól ismert:

$$B_{2m}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{2^{2m-1} n^{2m} \pi^{2m}}; \qquad B_{2m+1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{2^{2m} n^{2m+1} \pi^{2m+1}}.$$

Megjegyezzük, hogy a BERNOULLI-függvények 0 helyen felvett értékei fontosak, és a következő jelölések általánosan használtak:

$$B_{2m}(0) = \frac{B_m}{(2m)!}. \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Legyen mármost $f(x)$ elegendően sokszor folytonosan differenciálható függvény. Ismételt parciális integrálással adódnak a következő relációk:

$$\int_k^{k+1} f(x)\, dx = -\int_k^{k+1} B_0(x) f(x)\, dx = -\Big[B_1(x) f(x)\Big]_k^{k-1} + \int_k^{k+1} B_1(x) \cdot f'(x)\, dx =$$

$$= -\Big[B_1(x) f(x)\Big]_k^{k+1} - \Big[B_2(x) f'(x)\Big]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} B_2(x) f''(x)\, dx = \ldots$$

azaz felhasználva, hogy

$$\lim_{x \to k+0} B_1(x) = \frac{1}{2}; \qquad \lim_{x \to k+1-0} B_1(x) = -\frac{1}{2},$$

továbbá, hogy a periodicitás miatt

$$B_{2m}(k) = B_{2m}(k+1) = \frac{B_m}{(2m)!}; \qquad B_{2m+1}(k) = B_{2m+1}(k+1) = 0,$$

és átrendezve az előző relációt, a következő adódik:

$$\frac{1}{2}\,[f(k+1)+f(k)] = \int_k^{k+1} f(x)\,dx + \frac{B_1}{2!}\,[f'(k+1)-f'(k)] -$$

$$-\frac{B_2}{4!}\,[f'''(k+1)-f'''(k)] \pm \ldots + (-1)^m \frac{B_{m+1}}{(2m+2)!}\,[f^{(2m+1)}(k+1) -$$

$$-f^{(2m+1)}(k)] + (-1)^m \int_k^{k+1} B_{2m+3}(x)\,f^{(2m+3)}(x)\,dx.$$

A kapott formulákat $k = 0$-tól $k = n-1$-ig összegezve, és mindkét oldalhoz még $\frac{1}{2}\,[f(0)+f(n)]$-t hozzáadva, kapjuk az EULER-féle összegképletet:

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\,[f(0)+f(n)] + \frac{B_1}{2!}\,[f'(n)-f'(0)] - + \ldots +$$

$$+ (-1)^m \frac{B_{m+1}}{(2m+2)!}\,[f^{(2m+1)}(n) - f^{(2m+1)}(0)] + (-1)^m \int_0^n B_{2m+3}(x)\,f^{(2m+3)}(x)\,dx.$$

γ) Nyeregpont-módszer

Nagyon gyakran merül fel az a probléma, hogy

$$g(x) = \int_l (z-z_0)^{\alpha-1}\cdot F(z)\cdot e^{xf(z)}\,dz$$

alakú függvények tulajdonságait, speciálisan pl. aszimptotikus tulajdonságait kell vizsgálnunk (emlékeztetünk ezzel kapcsolatban arra, hogy egy sereg lineáris differenciálegyenlet megoldását kapjuk fenti alakban) ahol is l valamilyen JORDAN-görbeívet jelent, amely a z_0 pontból indul ki, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$; $F(z)$ és $f(z)$ a z_0 pont környezetében reguláris függvények, emellett $F(z_0) \neq 0$, végül pedig a $f(z)$ függvénynek nyeregpontja van z_0-ban. Ezen az értendő, hogy a z_0 pontban $f(z)$ első és esetleg néhány további deriváltja a zérus értéket veszi fel, azaz a z_0 pont környezetében $f(z)$ ilyen alakú:

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)^p\,\{a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots\},$$

ahol is $p \geqq 2$. Ennek a következő a jelentősége a fenti integrál szempontjából: vizsgáljuk meg, hogy az

$$f(z) = u(z) + i\,v(z)$$

függvény valós része a z_0 pontból kiindulva, milyen irányban változik a leggyorsabban! Amennyiben f-nek nincs z_0-ban nyeregpontja — azaz $f'(z_0) \neq 0$ — nyilván a $\overrightarrow{\text{grad}}\,u$ vektor irányában, azaz a z_0-on áthaladó $v = \text{const} = v(z_0)$ vonal irányában. Ha viszont nyeregpont van z_0-ban, akkor $\overrightarrow{\text{grad}}\,u = \vec{0}$, és így csak a magasabb differenciák vizsgálatával adhatunk választ a kérdésre. E válasz szerkezete: ha a nyeregpontban az $f(z)$

függvény első $p-1$ deriváltja tűnik el, akkor p darab olyan irány található, amelyek mentén a környezethez képest a leggyorsabban változik az $u(z)$ függvény; ezen irányok egymással $\frac{\pi}{p}$ nagyságú szöget zárnak be; ezen irányok szögfelezői (mint érintők) mentén olyan görbék indulnak ki a z_0 pontból, amelyek $2p$ szektorra osztják annak környezetét, úgyhogy e szektorokban a

$$\Delta u = u(z) - u(z_0)$$

differencia felváltva pozitív, illetve negatív, aminek megfelelően az egyes szektorokat *pozitív*, illetve *negatív szektorok*nak nevezzük.

Tekintsük mármost a $g(x)$-et definiáló integrál integrandusát; ennek — ha α nem egész szám (és általában ez a helyzet) — z_0-ban elágazási pontja van, e ponttól eltekintve azonban mindenesetre reguláris. Ennek következtében az l integrációs út CAUCHY tétele értelmében z_0 környezetében deformálható anélkül, hogy az integrál értéke változnék (természetesen a kezdő- és végpontot nem változtatva, és csak a reguláris tartományban deformálva az utat). Célszerűen úgy deformáljuk az l görbét, hogy az z_0-ból kiindulva — z_0-ban nyeregpontja van $f(z)$-nek! — valamelyik negatív szektorban, éspedig a szektorba eső azon egyenes mentén induljon, amely mentén $f(z)$ valós része, $u(z)$ a leggyorsabban változik, azaz negatív szektorról lévén szó, a legmeredekebben csökken. Megfelelően rövid egyenesdarab után pl. egy z_0 középpontú körív mentén visszatérünk az eredeti görbére. Ezzel a következőt értük el: aszimptotikus vizsgálatról lévén szó, feltehetjük, hogy x pl. nagy pozitív szám. Ekkor az integrandus abszolút értékét az

$$\left| e^{xf(z)} \right| = e^{x\,u(z)}$$

ényező befolyásolja döntően, ez pedig a kérdéses egyenesdarab mentén meredeken csökken.* Elegendő tehát egy rövid darabon integrálni ahhoz, hogy az integrál értékét jól becsülhessük; a maradékszakaszokon vett integrál abszolút értéke ugyanis az imént kiszámított ún. fő rész értéke mellett $-x$ nagyságtól függően — többé-kevésbé elhanyagolhatóan kicsi, és így az aszimptotikus vizsgálatnál az utóbbit csak becsülni szoktuk a hiba nagyságáról való tájékozódás céljából.

Példák és feladatok

a)

β 1. Mi az értelmezési, illetve mi a regularitási tartománya az

$$f(z) = \int_0^\infty \sin \alpha t \cdot e^{-tz}\, dt$$

függvénynek? Folytatható-e az a függvény analitikusan e tartományon kívül, s ha igen, mely tartományra? Határozzuk meg az analitikus folytatás révén nyert $f^*(z)$ analitikus függvényt!

Megoldás: Közvetlenül leolvasható, hogy az $f(z)$ függvényt definiáló improprius integrál abszolút konvergens, ha z valós része: x pozitív, de divergens, ha $x \leqq 0$.

* Minthogy nyeregpontban vagyunk, vízszintes érintővel indul $u(z)$, de első, 0-tól különböző magasabb deriváltja negatív. Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy ha $u(z)$ első deriváltja z_0-ban negatív — és nem 0 — akkor $x \to \infty$ esetén az integrál szóban forgó domináns része is 0-hoz tart. Ezért van az, hogy aszimptotikus vizsgálatnál elsősorban a nyeregpont esete bír érdekességgel.

$f(z)$ tehát csak a $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkon van értelmezve. Ezen a félsíkon azonban reguláris is. Ehhez egyrészt azt kell kimutatnunk, hogy egyértékű, másrészt azt, hogy differenciálható. Egyértékűsége triviálisan következik abból, hogy maga az integrálandó függvény is egyértékű. Hogy egyszersmind folytonosan differenciálható, így látható be: az integrandus a z paraméternek folytonosan differenciálható függvénye, a derivált ugyanis

$$-t \cdot \sin \alpha t \cdot e^{-zt}$$

-vel egyenlő. Azon tartományban, ahol ezen függvény improprius integrálja, azaz

$$-\int_0^\infty t \cdot \sin \alpha t \cdot e^{-zt}\, dt$$

egyenletesen konvergál, ott az eredeti függvény folytonosan differenciálható, és deriváltját épp ez utóbbi integrál adja. Azonnal látható, hogy ez utóbbi integrál minden $\operatorname{Re} z \geqq B > 0$ félsíkon valóban egyenletesen konvergál, azaz itt az eredeti $f(z)$ függvény reguláris. Ugyanis ez esetben tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan $A = A(\varepsilon; B)$, hogy

$$\left| \int_A^\infty t \sin \alpha t \cdot e^{-tz}\, dt \right| < \varepsilon.$$

Hiszen $t \sin \alpha t\, e^{-tz}$ az $A, \infty)$ szakaszon majorálható $t \cdot e^{-tB}$-vel.

Egyébként az $f(z)$-t definiáló integrál zárt alakban is könnyen kiszámítható:

$$\int_0^\infty \sin \alpha t \cdot e^{-tz}\, dt = \int_0^\infty \frac{e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}}{2i} e^{-tz}\, dt = \frac{\alpha}{z^2 + \alpha^2},$$

hacsak $\operatorname{Re} z > 0$.

Ebből azonban azonnal leolvasható, hogy az eredeti $f(z)$ függvény, amely csak a $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkon volt definiálva, analitikusan folytatható az egész síkra, analitikus folytatása az

$$f^*(z) = \frac{\alpha}{z^2 + \alpha^2}$$

függvény. Ez egyszerűen abból következik, hogy a $\operatorname{Re} z = 0$ félsíkon $f(z)$ *is*, $f^*(z)$ *is reguláris, és azonosan egyenlők*, így tehát f^*, amely a $z_1 = -i\alpha$ és $z_2 = i\alpha$ pólushelyek kivételével az egész síkon reguláris, ott f analitikus folytatása.

2. Mi az értelmezési, illetve regularitási tartománya az

$$\int_0^\infty t^n \cdot e^{-zt}\, dt, \quad \text{illetve} \quad \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-tz}\, dt$$

függvényeknek (n természetes szám)? Folytathatók-e analitikusan e függvények, s ha igen, mely tartományra és mi az analitikus folytatásuk?

3. Határozzuk meg a

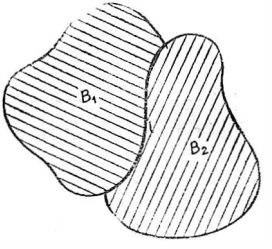
$$\Gamma^*(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t}\, dt$$

függvény értelmezési, illetve regularitási tartományát. Folytatható-e a függvény e tartományon kívül analitikusan, s ha igen, mely tartományra és hogyan?

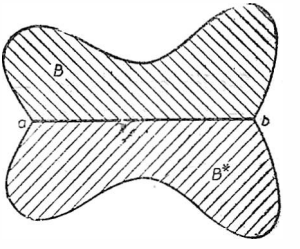
4. Legyen $f_1(z)$ a B_1, $f_2(z)$ pedig a B_2 egyszeresen összefüggő tartományban reguláris, a két tartomány határának egy közös része legyen az l JORDAN-görbe (25. ábra) és mindkét függvény legyen még magán l-en is reguláris. Az l görbe mentén legyen továbbá

$$f_1(z) \equiv f_2(z).$$

Igazoljuk, hogy ez esetben f_1 és f_2 egymás analitikus folytatásai (RIEMANN-tétel).



25. ábra



26. ábra

5. Legyen $f(z)$ reguláris a B tartományban, amelyet egyik oldalon a valós tengely $[a, b]$ szakasza határol. Legyen $f(z)$ még a B tartomány $[a, b]$ peremén is *folytonos*, és itt vegyen fel valós értékeket. Igazoljuk, hogy ez esetben $f(z)$ analitikusan folytatható azon B^* tartományba, amely B-nek a valós tengelyre vonatkozó tükörképe (26. ábra). Határozzuk meg az analitikus folytatást (Schwarz-féle „tükrözési elv")!

6. Tekintsük azt az $f(z)$ analitikus függvényt, amelynek egyik eleme:

$$f_1(z) = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + \ldots + z^{2^n} + \ldots$$

Határozzuk meg a megadott elem konvergenciakörét, továbbá azt, hogy folytatható-e az $f(z)$ analitikus függvény e körön túl; ha igen, mely tartományra és hogyan?

Megoldás: Igen egyszerűen (pl. a hányados- vagy gyökkritériummal) megállapíthatjuk, hogy az adott elem konvergenciakörének sugara egységnyi. Azonnal leolvasható továbbá, hogy a $z = 1$ helyen nem konvergál a sor. Igazoljuk, hogy itt az $f(z)$ analitikus függvénynek szinguláris pontja van! (Abból ugyanis, hogy az adott elem nem konvergál a konvergenciakör kerületének valamely pontjában, még nem következik, hogy ott az analitikus függvény szinguláris ponttal rendelkezik. Gondoljunk pl. az $(1 + z)^\alpha$ függvény MACLAURIN sorára; a $z = 1$ helyen a sor nem konvergál, ha $\alpha \geqq -1$, holott itt a függvénynek nincs szinguláris pontja.) Könnyen leolvasható azonban, hogy

$$\lim_{\text{Im } z=0;\ z \to 1-0} f_1(z) = +\infty,$$

amiből pedig az ABEL-*tétel* alapján következik, hogy $f(z)$-nek szinguláris pontja van $z = 1$-ben. Igazoljuk, hogy $f(z)$-nek az egységkör minden olyan z_e pontjában szingularitása van, amelyhez található olyan természetes n és k, hogy az

$$\arc z_e = \frac{\pi}{2^n} k$$

egyenlet fennálljon. Ugyanis $f_1(z)$ kielégíti a következő függvényegyenleteket:

$$f_1(z) \equiv z^2 + f_1(z^2)$$

$$f_1(z) \equiv z^2 + z^4 + f_1(z^4)$$

$$\vdots$$

$$f_1(z) \equiv z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^S} + f_1(z^{2^S}),$$

$$\vdots$$

Mármost az S-edik egyenletből — a $z = 1$ hellyel kapcsolatos megállapítások felhasználásával — azonnal leolvasható, hogy az egységkör minden olyan z_e pontjában, amelyre érvényes az $\arc z_e = \frac{\pi}{2^s} k$ $(k_1 = 0, 1, 2, \ldots, 2^{s+1} - 1)$ reláció, $f_1(z)$ radiális limesze $+\infty$-nel egyenlő. Az ABEL-tétel értelmében tehát minden ilyen pontban az $f(z)$ függvénynek szinguláris helye van.

Minthogy továbbá az egységkör bármely pontja sűrűsödési helye a fenti típusú z_e pontoknak, szinguláris helyek sűrűsödési helye pedig (lényegesen) szinguláris, azért az $f(z)$ analitikus függvénynek az egységkör minden pontjában (lényeges) szingularitása van. Ebből következik, hogy az $f(z)$ függvény bármely más elemének konvergenciaköre érinti (éspedig belülről) az egységkört, azaz teljes egészében benne van az egységkörben. Következésképp $f_1(z)$ nem folytatható az egységkörön kívül, azaz $f_1(z)$ előállítja a teljes $f(z)$ analitikus függvényt.

7. Tekintsük azt az $f(z)$ analitikus függvényt, amelynek egyik eleme

$$f_1(z) = 1 + z + z^2 + z^6 + \ldots + z^{k!} + \ldots$$

Határozzuk meg az adott elem konvergenciakörét, továbbá azt, hogy folytatható-e az $f_1(z)$ analitikus függvény e körön túl; ha igen, mely tartományra és hogyan?

8. Tekintsük az ún. BOREL-féle függvénytranszformációt: Legyen $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ az $f(z)$ analitikus függvény egy ($z = 0$ centrumú) eleme, $\Phi(z)$ pedig a következő függvény:

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Igazoljuk, hogy az

$$f_2(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \Phi(z \cdot t)\, dt$$

függvény egy olyan B tartományban reguláris, amely tartalmazza $f_1(z)$ konvergenciakörét, s itt $f_2(z)$ az $f_1(z)$ függvény analitikus folytatása (amely azonban szintén nem adja meg általában a teljes $f(z)$ analitikus függvényt). Határozzuk meg a B tartomány alakját.

γ 1. Tekintsük az $f(z)$ analitikus függvény egyik elemét:

$$f_1(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

Igazoljuk, hogy $f_1(z)$ kielégíti az

$$[f_1(z)]^2 = \frac{d}{dz} f_1(z)$$

differenciálegyenletet, továbbá ennek alapján, de a permanenciatétel felhasználása nélkül igazoljuk, hogy maga az $f(z)$ analitikus függvény is kielégíti az

$$f^2 = f'$$

differenciálegyenletet!

Megoldás: a) Ismeretes, hogy a hatványsorok CAUCHY-szorzatai a két konvergenciakör közös részének belsejében a sorösszegek szorzatához konvergálnak (hiszen a konvergenciakör belsejében abszolút konvergencia áll fenn). Az f_1 függvény négyzetének hatványsora tehát a CAUCHY-szorzat képzési szabályának megfelelően közvetlenül felírható, és az eredeti konvergenciakör belsejében (az egységkörben) konvergál. Minthogy a CAUCHY-szorzatban z^n a következő részletszorzatokból jön létre:

$$z^0 z^n; \quad z \cdot z^{n-1}; \quad z^2 \cdot z^{n-2}; \quad \ldots \quad ; \quad z^{n-1} \cdot z; \quad z^n \cdot z^0,$$

és minthogy mindegyiknek 1 az együtthatója, azért a szorzatban z^n együtthatója: $n + 1$. Így

$$f_2^1 = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots + (n + 1)\, z^n + \ldots$$

Innét azonnal leolvasható, hogy az f_1 elem (konvergenciakörében!) valóban kielégíti a megadott differenciálegyenletet.

b) A differenciálegyenletet írjuk így:

$$F(f; f') \equiv f^2 - f' = 0.$$

Mármost F mindkét argumentumának mindenütt analitikus függvénye, s így z-nek (közvetetten) analitikus függvénye ott, ahol f is és f' is (tehát ahol f) analitikus. Mármost f analitikus folytatásának megadásával — pl. f_1 konvergenciakörének egy belső pontjában történő TAYLOR-sorfejtéssel — egyszersmind f' analitikus folytatása, tehát F-nek mint függvényének analitikus folytatása is adva van. (F ti. mint z függvénye eredetileg csak f_1 konvergenciakörének belsejében van adva.) F azonban *mint z függvénye* azonosan 0, tehát analitikus folytatása is az azonosan 0 függvény. Ez azonban azt jelenti, hogy f_1 analitikus folytatása az adott differenciálegyenletet mindenütt — ahol létezik — kielégíti. (Megjegyezzük, hogy f_1 az $\frac{1}{1-z}$ függvény egy eleme, amelyről azonnal leolvasható, hogy kielégíti az adott differenciálegyenletet.)

2. Bizonyítsuk be a bevezetésben ismertetett permanenciatételt, a 2. § *a)* γ) 1. feladat *b)* részében ismertetett gondolatmenet alapján!

3. A 2. § *a)* β) 3. feladatban a $\Gamma^*(z)$ függvényt definiáltuk egy integrál segítségével a $\mathrm{Re}\, z > 0$ félsíkon. Igazoljuk parciális integrálással, hogy Γ^* itt kielégíti a

$$\Gamma^*(z+1) \equiv z\,\Gamma^*(z)$$

függvényegyenletet. Mutassuk meg, hogy az integrál analitikus folytatása révén nyert $\Gamma(z)$ függvény mindenütt, ahol analitikus, kielégíti az adott függvényegyenletet!

4. Az előző feladatra támaszkodva, bővítsük a permanenciatételt; bizonyítsuk be ti., hogy — megfelelő feltételek mellett — függvényegyenletek esetében is érvényes. Igazolását az előző példa gondolatmenete alapján végezhetjük.

b)

1. Bizonyítsuk be, hogy egy komplex elemű sorozat akkor és csakis akkor konvergál, ha vagy az elemek abszolút értéke 0 sorozatot, vagy pedig ha az elemek abszolút értéke is, arkusza is konvergens sorozatot alkot.

2. Bizonyítsuk be a következő tételt: azok a (komplex) számok, amelyek egy (komplex tagú) feltételesen konvergens sor megfelelő átrendezésével mint annak összege állíthatók elő, vagy egy — a sor által egyértelműen meghatározott — egyenesen, vagy az egész síkon *tetszőlegesen* előírhatók.

3. Tekintsük a

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(z)]$$

végtelen szorzatot, és tegyük fel, hogy

a) az $f_1(z)$; $f_2(z)$; . . . stb. tagok valamennyien regulárisak valamely $|z - z_0| < r_0$ nyílt körlemezen;

b) a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$$

sor *bármely* $(0 < r < r_0$ sugarú) $|z - z_0| \leqq r$ *zárt* körlemezen *egyenletesen* konvergál.

Bizonyítsuk be, hogy ez esetben

A) a végtelen szorzat abszolútkonvergens a $|z - z_0| < r_0$ nyílt körlemezen;

B) ott egy reguláris $f(z)$ függvényt állít elő;

C) e körlemez bármely olyan ζ pontjában, ahol $f(\zeta) \neq 0$, $f(z)$ logaritmikus deriváltja a formális differenciálás révén kapott

$$\left(\frac{d}{dz} \ln f(z)\right)_{z=\zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(\zeta)}{1 + f(\zeta)}$$

sorral állítható elő.

4. Érvényes marad-e az előző tétel *A)*, *B)*, illetve *C)* állítása, ha — a soroknál ismertetett módon — a *b)* feltételt a következővel pótoljuk:

b) A

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$$

sor a $|z - z_0| = r_0$ egyenletű *köríven egyenletesen konvergál?*

Megemlítjük itt, hogy (a valósban megismert), a pozitív tagú sorokra vonatkozó kritériumok segítségével komplex tagú soroknál általában csak az abszolút konvergencia vizsgálható. Épp ezért fontos a WEIERSTRASS-féle kritérium alábbi változata:

5. A komplex tagú $\sum a_n$ sor tagjainak hányadossorozata legyen ilyen alakban előállítható:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} - \frac{A_n}{n^{\lambda}}$$

tetszőleges komplex α-val, ahol is az $|A_n|$ sorozat korlátos, λ pedig 1-nél nagyobb valós szám. Igazoljuk, hogy ez esetben érvényesek az alábbiak:

a) A $\operatorname{Re}\alpha > 1$ esetben a sor abszolút konvergens, a $\operatorname{Re}\alpha \leqq 1$ esetben viszont divergens;

b) A $0 < \operatorname{Re}\alpha \leqq 1$ esetben azonban a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_{n+1}| \quad \text{és a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

sorok konvergensek.

6. Tekintsük a (komplex tagokkal bíró) $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ végtelen szorzatot, és tegyük fel, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$$

sor konvergens. Bizonyítsuk be, hogy ezen „mellékfeltétel" teljesülése esetén szorzatunk akkor és csakis akkor konvergál, ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

sor konvergens!

7. Határozzuk meg a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left|1 + \frac{z}{n}\right|$$

szorzat konvergencia-tartományát.

8. Igazoljuk, hogy az

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^n) \quad \text{és a} \quad \varphi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^{2n-1})$$

függvények az egységkörben analitikusak.

Bizonyítsuk be továbbá, hogy fennáll itt (ti. az egységkörben) az

$$f(z) \cdot \varphi(z) \equiv 1$$

azonosság.

Megoldás: 1. Elsősorban igazoljuk, hogy a megadott két végtelen szorzat csakis a nyílt egységkörben konvergál.

Ugyanis a 2. § *b)* 6. feladat eredményeit felhasználhatjuk. A $\sum |a_n|^2$ sor ti. mindkét szorzat esetén (éspedig épp a fent megadott tartományban) konvergens — mindkettő egy-egy geometriai sor egynél kisebb hányadossal. Ugyanez a helyzet a $\sum a_n$ sorral kapcsolatban is. Az egységkör kerületén, illetve ezen kívül viszont a szorzatok nem konvergálhatnak, mert itt már nem teljesül az a szükséges feltétel, hogy a tagok 0 sorozatot alkotnának.

2. A 2. § *b)* 3. feladat alapján, a fentiek mintájára azonnal leolvasható az is, hogy $f(z)$, illetve $\varphi(z)$ analitikusak az egységkör belsejében.

3. A fentiek mintájára az is azonnal belátható, hogy az egységkör belsejében a két szorzat *abszolút* konvergens.

4. A két szorzat szorzata — közös konvergencia-tartományukban — meghatározható egyszerűen úgy, hogy a megfelelő tényezők szorzatának végtelen szorzatát vesszük. Abszolút konvergens szorzatok ilyen alakú szorzatai is abszolút konvergensek, ezért a tényezők sorrendje tetszőlegesen felcserélhető. A számolás menete a következő:

$$(fz) \cdot \varphi(z) = (1+z)(1-z)(1+z^2)(1+z^3)(1-z^3)(1+z^4)(1+z^5)(1-z^5)\ldots$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} [(1+z^{2n-1})(1-z^{2n-1})] \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1+z^{2n})$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1-z^{4n-2}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1+z^{2n}) =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1+z^{4n-2})(1-z^{4n-2}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1+z^{4n}) =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1-z^{8n-4}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1+z^{4n}) = \ldots$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1-z^{2^{k+1} \cdot n - 2^k}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1+z^{2^k \cdot n}) = \ldots$$

Mármost a $|z| < 1$ tartományban a

$$\left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1-z^{2^k \cdot n - 2^{k-1}}) \right\}, \quad \text{illetve} \quad \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1+z^{2^k \cdot n}) \right\}$$

sorozatok $k \to \infty$ esetében konvergensek, és határértékük 1. (Ennek igazolásánál szorítkozhatunk z valós értékeire, hiszen a szorzatok $|z| < 1$-ben analitikus függvényt állítanak elő; a valós tengelyen azonosan 1 függvény analitikus folytatása pedig: az egész számsíkon azonosan 1 függvény.) Az első sorozat így monoton növekvő, a második pedig monoton csökkenő sorozat; k növelésével ti. az első szorzat *valamennyi* tényezője nő, a másodiké pedig csökken. Konvergenciájuk tehát biztosítva van. Hogy $k \to \infty$ esetén valóban közös a határértékük, éspedig 1, az is egyformán látható be; a második szorzat esetén pl. így:

Tekintsük az

$$\left\{a_k = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^{2^k \cdot n})\right\}, \quad \text{ill. a} \quad \left\{b_k = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^{2^k \cdot n})\right\}$$

a $|z| < 1$ tartományban értelmezett, monoton növekvő, resp. monoton csökkenő sorozatot. Legyen

$$a = \lim_{k \to \infty} a_k; \qquad b = \lim_{k \to \infty} b_k.$$

Nyilván

$$a_k < 1 < b_k$$

és így

$$a \leqq 1 \leqq b.$$

Tekintsük mármost az $\{a_k b_k\}$ sorozatot:

$$a_k \cdot b_k = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^{2^{k+1} \cdot n}) = a_{k+1}.$$

Így

$$\lim_{k \to \infty} a_k b_k = a \cdot b = \lim_{k \to \infty} a_{k+1} = a,$$

azaz $ab = a$, tehát $b = 1$, amit igazolni akartunk.

5. Megjegyezzük, hogy a bizonyítást pl. úgy is elvégezhettük volna, hogy $f(z)$ tényezőit megfelelően csoportosítva, „erősen átrendezzük" a szorzatot az alábbi módon:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^n) = \prod_{s=1}^{\infty} \left\{ \prod_{k=0}^{\infty} [1 + (z^{2s-1})^{2^k}] \right\}.$$

Mármost az

$$f_S(z) = \prod_{k=0}^{\infty} [1 + (z^{2s-1})^{2^n}]$$

szorzat értéke $(1 - z^{2s-1})$-gyel történő szorzás után azonnal adódik, ugyanis

$$(1 - z^{2s-1}) \cdot f_S(z) \equiv 1, \quad \text{ha} \quad |z| < 1.$$

Így

$$f_S(z) = \frac{1}{1 - z^{2s-1}}.$$

Ezt helyettesítve $f(z)$ kettős szorzat alakjába, azonnal adódik az

$$f(z) \equiv \frac{1}{\varphi(z)}$$

reláció.

9. Tekintsük az

$$F_x(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n z), \quad \text{illetve} \quad \Phi_x(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2n-1} z)$$

függvényeket, ahol x valós paraméter. Határozzuk meg e függvények regularitási tartományát és MACLAURIN sorfejtését.

10. Igazoljuk, hogy a $|z| < 1$ tartományban érvényes a

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n) \equiv 1 - 2z + \sum_{n=1}^{\infty}\left[z^{\frac{3n^2-n}{2}} - z^{\frac{3n^2+n}{2}}\right]$$

azonosság.

11. Legyen z_1 és z_2 két szám, amelyek egyike sem 0; mindkettőjük arkusza essék a $[0; \pi)$ intervallumba, és legyen pl. $0 < |z_1| < |z_2|$.

Határozzuk meg, hogy a

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m z_1 + n z_2)^{\sigma}}$$

sor σ mely valós értékeinél abszolút konvergens.

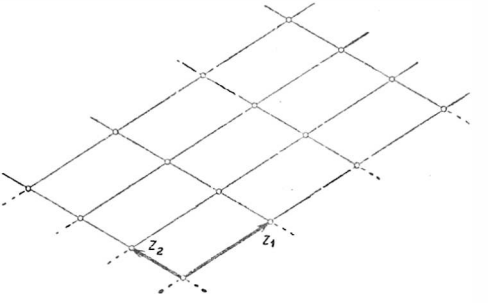
Megoldás: A sor abszolút konvergenciáját, azaz a

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{(m z_1 + n z_2)^{\sigma}}\right| = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m z_1 + n z_2)^{\sigma}}$$

sor konvergenciáját kell vizsgálnunk. E kettős sor tagjait rendezzük a szokásos négyzetes végtelen sémába:

$$\begin{array}{llll} |z_1+z_2|^{-\sigma} & |z_1+2z_2|^{-\sigma} & |z_1+3z_2|^{-\sigma} & \dots \\ |2z_1+z_2|^{-\sigma} & |2z_1+2z_2|^{-\sigma} & |2z_1+3z_2|^{-\sigma} & \dots \\ |3z_1+z_2|^{-\sigma} & |3z_1+2z_2|^{-\sigma} & |3z_1+3z_2|^{-\sigma} & \dots \end{array}$$

Pozitív tagú kettős sorról lévén szó, e sor akkor és csakis akkor konvergál, ha tetszőlegesen (akár „erősen" is) átrendezve a sor tagjait, azaz a négyzetes sémából tetszőleges sorrendben választva ki a sor tagjait, konvergens sort kapunk. Megjegyezzük, hogy a sor összege is változatlan marad. Becsléseket legegyszerűbben úgy adhatunk, ha a négyzetes sémából egymás után „levágjuk a bal felső saroknégyzeteket", és az élek mentén található tagok összegét összegezzük. Ez geometriailag a következőképpen szemléltethető: ábrázolva az $m z_1 + n z_2$ alakú pontokat, az alábbi síkrácsot kapjuk (27. ábra).* Az új — átrendezett — sor első tagja azon rácsponthoz tartozó tag, amelyre $m = n = 1$. A második tag azon rácspontokhoz tartozó tagok összege, amelyekre $m = 2$, $n = 1$, illetve $m = 2$, $n = 2$, illetve $m = 1$, $n = 2$. Általában a k-adik tag azon rácspontokhoz tartozó tagok összege, amelyekre $m = k$, és $n = 1$ vagy 2, vagy stb., vagy végül k, illetve amelyekre $n = k$, és $m = 1$ vagy 2, vagy stb., végül $m = k - 1$. Ilyen tag tehát



27. ábra

* Megjegyezzük, hogy σ negatív értékeinél a sor nyilván nem lehet konvergens. Megemlítjük továbbá, hogy arc z_1 = arc z_2 esetén a rács egyenesre deformálódik, a következő gondolatmenet azonban ekkor is érvényes.

összesen $k + k - 1 = 2k - 1$ darab van. Ezen $2k - 1$ számú tag közül a legkisebb (abszolút értékű) az

$$\frac{1}{|k z_1 + k z_2|^\sigma} = \frac{1}{k^\sigma} \cdot \frac{1}{|z_1 + z_2|^\sigma},$$

a legnagyobb pedig — a $|z_1| < |z_2|$ feltétel miatt — az

$$\frac{1}{|k z_1 + z_2|^\sigma} < \frac{1}{|k z_1|^\sigma} = \frac{1}{k^\sigma} \cdot \frac{1}{|z_1|^\sigma}$$

értékű tag. Így

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^\sigma} \frac{1}{|z_1 + z_2|^\sigma} < \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|m z_1 + n z_2|^\sigma} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^\sigma} \cdot \frac{1}{|z_1|^\sigma}.$$

Minthogy a minoráló és majoráló sor is csak $\sigma > 2$ esetén konvergál (ti. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^\sigma}$ együtt konvergál, illetve divergál a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\sigma-1}}$ sorral), azért az eredeti sor $\sigma > 2$ esetén, és csakis ekkor abszolút konvergens.

12. Legyen a $f(z)$ és a $F(z)$ függvény reguláris a $|z| < r$ körben, továbbá $f(0) \neq 0$. Bizonyítsuk be a következő állításokat:

a) Található olyan $\varrho > 0$ mennyiség, hogy a $|w| \leqq \varrho$ feltétel mellett a

$$\psi(z; w) = z - w f(z)$$

függvénynek csak egyetlen 0 helye van a $|z| < r$ körben, továbbá, hogy e (ζ-val jelzett) 0 hely, mint w függvénye, változójának reguláris függvénye a ϱ sugarú körlemezen, azaz a

$$\zeta = X(w)$$

függvény reguláris a $|w| \leqq \varrho$ zárt körlemezen.

b) Érvényes a következő formula:

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} F(z) \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial z}\Psi(z, w)}{\psi(z, w)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} F(z)\, \frac{1 - w f'(z)}{z - w f(z)}\, dz.$$

c) Az előbbi, CAUCHY-típusú formula alapján megkapható az ún. „LAGRANGE-*féle kifejtés*":

$$F(\zeta) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{F'(z) \cdot [f(z)]^n\} \right\}_{z=0}.$$

13. Határozzuk meg a

$$z(1 + z)^m = A$$

egyenlet (m pozitív valós szám) azon gyökének értékét ($|A|$ kis értékeinél) *a* hatványsora segítségével, amely $A \to 0$ esetén $z \to 0$-ra redukálódik.

hetjük, ahol is z_0-tól mint paramétertől függenek a sorfejtés együtthatói. Az egyenlet azonban zárt alakban is megoldható, éspedig

$$\zeta = \frac{1 - \sqrt{1 - 2z\,w + w^2}}{w}.$$

Ebből azonnal adódik, hogy

$$\frac{d\zeta}{dz_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2z\,w + w^2}},$$

azaz épp a kifejtendő függvény. A sorfejtést tehát az eredeti LAGRANGE-féle kifejtés deriválásával kaphatjuk.

15. Legyen $z \cdot e^{bz} = w$. Határozzuk meg e^{az}-t mint w, azaz mint $z\,e^{bz}$ hatványsorát. Mely tartományban konvergál a sorfejtés?

16. Legyen $w = \frac{1}{z} \ln z$. Határozzuk meg z kifejtését w hatványai szerint. Mely tartományban konvergál a kapott sor?

17. KEPLER egyenlete szerint a bolygómozgás elliptikus pályájának e excentricitása, E excentrikus anomáliája és K átlagos anomáliája így függenek össze:

$$E = K + e \sin E.$$

Határozzuk meg az excentrikus anomáliának az excentricitás szerint haladó sorfejtését

18. Határozzuk meg az

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{z}{n}}{\frac{z}{n}}$$

függvény definiciós, illetve regularitási tartományát.

19. Határozzuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1 - z^n)(1 - z^{n+1})}$$

sor konvergenciatartományát, illetve összegét! Vizsgáljuk meg a probléma megoldását az analitikus folytatás elvének szemszögéből is.

c)

β 1. Határozzuk meg a

$$w = \operatorname{cotg} z$$

meromorf függvény (MITTAG—LEFFLER-féle) részlettörtes előállítását.

Megoldás: A

$$w = \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Megoldás: Az előző feladat alapján hajtható végre a sorfejtés. Ugyanis a

$$\psi(z, A) = z - A f(z) = z - A(1 + z)^{-m}$$

függvény gyökét kell keresnünk. (Megjegyezzük, hogy az eredeti egyenletnek $A = 0$ esetben két gyöke van, éspedig $z = 0$ és $z = -1$. ζ-val jelölve tehát a gyököt, a $\zeta = \zeta(A)$ függvény kétértékű. A fenti átalakítással a kétértékű függvény azon reguláris ágát tudjuk a LAGRANGE-féle kifejtéssel megkeresni, amely az $A = 0$ választásánál $\zeta = 0$-ra redukálódik, azaz azt, amelyet a feladat szerint meg kell keresnünk. A másikat az általánosabb LAGRANGE-féle kifejtéssel lehetne megkeresni, amely szerint

$$F(\zeta) = F(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \{F'(\zeta) \cdot [f(z - \zeta)]^n\} \right\}_{\zeta=z}.$$

Tehát a 12. feladat jelöléseire tekintve:

$$f(z) = (1 + z)^{-m},$$

amely a $|z| < 1$ körben reguláris. Minthogy magát a gyököt keressük, a 12. feladatban szereplő $F(z)$ függvényt z-vel azonosnak választjuk, és a LAGRANGE-féle kifejtést használjuk; az egyenlet gyökét ζ-val jelöljük:

$$\zeta = z|_{z=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{1 \cdot [(1 + z)^{-m}]^n\} \right\}_{z=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (1 + z)^{-m \cdot n} \right\}_{z=0} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} (-n\,m)\,(-n\,m - 1) \ldots (-n\,m - n + 2) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-n\,m}{n-1} \frac{A^n}{n!} =$$

$$= A - \frac{2m}{2!} A^2 + \frac{3m\,(3m + 1)}{3!} A^3 - \frac{4m\,(4m + 1)\,(4m + 2)}{4!} A^4 + - \ldots$$

14. Az

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2z\,w + w^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w^n \cdot P_n(z)$$

sorfejtést tekintve, igazoljuk, hogy a $P_n(z)$ függvény z-nek pontosan n-ed fokú polinomja. Bizonyítsuk be az ún. RODRIGUEZ-formulát is:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n.$$

Útbaigazítás: Jelöljük ζ-val a

$$z = z_0 + \frac{w\,(z^2 - 1)}{2}$$

egyenlet azon gyökét, amely $w = 0$ esetében $\zeta = z_0$-ra redukálódik ($z_0 \neq \pm 1$). Ezen gyököt az (általános) LAGRANGE-féle sorfejtés alapján w hatványsorával kifejt-

függvény valóban meromorf függvény, hiszen a végesben csak pólushelyei — éspedig elsőrendű pólushelyei — vannak a

$$z_k = k\pi \quad (k = 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \ldots)$$

helyeken és csakis itt. Minthogy a $z = 0$ hely elsőrendű pólusa a tekintett függvénynek, éspedig

$$\frac{\cos z\,|_{z=0}}{\dfrac{d}{dz}\sin z\,\Big|_{z=0}} = \frac{1}{1} = 1$$

rezidiuummal, azaz $\dfrac{1}{z}$ fő résszel, célszerű helyette a

$$w^* = \operatorname{cotg} z - \frac{1}{z} = \frac{z\cos z - \sin z}{z\sin z} \qquad (z \neq 0)$$

függvényt tekinteni, amely az origóban már reguláris, és itt — a BERNOULLI—L'HOSPITAL-szabály alapján számolva — a 0 értéket veszi fel.

A $z_k = k\pi$ helyhez tartozó reziduum értéke

$$\frac{\cos z\,|_{z=k\pi}}{\dfrac{d}{dz}\sin z\,\Big|_{z=k\pi}} = 1,$$

az e helyhez tartozó főrész tehát $\dfrac{1}{z - k\pi}$ alakú.

Könnyen belátható, hogy a bevezetésben említett első tétel alkalmazható a részlettört előállításnál, nevezetesen található olyan $\{C_n\}$ görbesorozat, amely kielégíti a tétel lel kapcsolatos követelményeket. E görbesorozat pl. a következőképp választható: a C_{2n} görbe, amely a $k = 0;\ 1;\ -1;\ \ldots;\ (n-1);\ (-n+1)$ és n indexhez tartozó pólusokat tartalmazza belsejében, a $z = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi + tj$ egyenes $t = -n\pi$ és $t = n\pi$ paraméterértékek közötti szakaszából, továbbá a $z = \pi n j + t$ egyenes $t = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ és $t = -\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\pi$ paraméterértékek közötti szakaszából, emellett a $z = -\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\pi + tj$ egyenes $t = n\pi$ és $t = -n\pi$ közötti szakaszából, végül pedig a $(z = -n\pi j + t$ egyenes $t = -\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\pi$ és $t = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ közötti szakaszából áll.

A C_{2n+1} görbének, amely az előbbieken kívül a $k = -n$ indexű pólushelyeket is belsejében tartalmazza, a fentebb leírt téglalapkerülettől, a C_{2n}-től csak annyiban kell különböznie, hogy harmadik oldala pl. nem a $z = -\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\pi + tj$, hanem a $z = -\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi + tj$ egyenletű egyenes ugyanazon szakasza lesz, míg a második és negyedik oldal — ennek megfelelően — a negatív valós tengely irányában π egységgel megnyúlik.

Szükségtelen részleteznünk, hogy e görbesorozat az említett tétel mindkét feltételének megfelel. Azt kell azonban még belátnunk, hogy a tekintett függvény — azaz $\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}$ — abszolút értéke egyenletesen korlátos marad a görbesorozat kerületén. De

$$\left|\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}\right| \leqq |\operatorname{cotg} z| + \left|\frac{1}{z}\right|.$$

A jobboldal második tagja valóban egyenletesen korlátos. Az első taggal kapcsolatos vizsgálat is egyszerű, mert a cotg z függvény π periódusú lévén, valamennyi vizsgált görbeszakasz π többszörösével eltolható egészen a $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ sávba. Itt tehát egyrészt a

$$z = \frac{\pi}{2} + tj, \quad \text{másrészt a} \quad z = k\pi j + t \qquad (|k| \geqq 1)$$

egyeneseken kell vizsgálnunk a függvény értékkészletét. Felhasználva a

$$\operatorname{ctg}(z_1 + z_2) = \frac{1 - \operatorname{tg} z_1 \operatorname{tg} z_2}{\operatorname{tg} z_1 + \operatorname{tg} z_2} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{tg} j\alpha = j \operatorname{th} \alpha$$

relációkat, könnyen belátható, hogy a tekintett első egyenesen $|\operatorname{ctg} z|$ maximumát a $t = 0$ pontban, a második egyenessorozat esetén pedig a $|k| = 1$ egyeneseken, éspedig a $t = 0$, illetve $t = \pi$ pontban veszi fel, amiből az egyenletes korlátosságra vonatkozó állításunk következik. Így

$$\operatorname{ctg} z \equiv \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right] + \left[\frac{1}{z + k\pi} - \frac{1}{k\pi}\right]\right\}$$

$$\equiv \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi}\right\} \equiv \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}.$$

2. Határozzuk meg a

$$w = \frac{z}{\sin z}$$

meromorf függvény (MITTAG—LEFFLER-féle) részlettörtes előállítását.

Útbaigazítás: Lényegében ugyanolyan típusú függvényről van szó, mint a megelőző feladatban, sőt a $z = 0$ hely kivételével ugyanazok a pólushelyek szerepelnek. Az előző feladatban adott görbesorozat megfelel itt is, csakhogy — és könnyen belátható-an a görbesorozat bármely más választásánál is — a tekintett függvény abszolút értéke már nem marad a görbesorozat mentén egyenletesen korlátos. Ezzel szemben a bevezetésben megadott második tétel alkalmazható (éspedig már a $p = 1$ választás is megfelel).

3. Határozzuk meg, hogy mely függvény részlettörtes alakját adja az alábbi sor:

$$\frac{1}{z} + \left\{\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right\}(-1)^k\left[\frac{1}{z - k} + \frac{1}{k}\right].$$

Megoldás: A következőket olvashatjuk le:

a) A keresett függvény meromorf, amelynek pólushelyei a $z_k = k$ ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$) helyek.

b) A kérdéses helyekhez tartozó reziduum $(-1)^k$-nal egyenlő. Megjegyezzük továbbá, hogy

c) bármely két egész függvény hányadosa meromorf függvény, és megfordítva, bármely meromorf függvény felírható mint két egész függvény hányadosa.

E megjegyzés első része triviális, második része majdnem triviális. Legyen ugyanis $m(z)$ a tekintett meromorf függvény; pólushelyeinek sorozata $\{a_k\}$; zérushelyeinek sorozata pedig $\{b_k\}$. Legyen $A(z)$, illetve $B(z)$ olyan transzcendens egész függvény, amelynek zérushelyei az $\{a_k\}$, illetve $\{b_k\}$ pontokban és csakis itt vannak. Ekkor

$$\frac{m(z) \cdot A(z)}{B(z)} = e^{g(z)}$$

(ahol is $g(z)$ egész függvény), ugyanis a baloldalnak sem pólushelyei, sem zérushelyei (még kevésbé lényeges szingularitása) nincsenek, azaz olyan egész függvény, amely a jobboldalon adott alakban írható fel. Így

$$m(z) = e^{g(z)} \frac{B(z)}{A(z)},$$

ahogy állítottuk.

Mármost a mi esetünkben a nevező olyan egész függvény, amelynek a $z = k$ helyeken (és csakis itt) vannak 0 helyei. Ilyen függvény pl. a $\sin \pi z$. Tehát

$$\frac{1}{z} + \left\{ \sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \right\} (-1)^k \left[\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right] = \frac{E(z)}{\sin \pi z},$$

ahol $E(z)$ valamely egész függvény. Ezen egész függvényről a reziduumok kiszámítása révén lehet közelebbit megtudni:

$$(-1)^k = \frac{E(k)}{\pi \cos \pi k} = \frac{E(k)}{\pi (-1)^k},$$

azaz

$$E(k) = \pi.$$

Tehát az $E(z)$ egész függvény a $z = k$ helyeken az állandó értéket veszi fel. Minthogy pedig a

$$\frac{\pi}{\sin \pi z}$$

meromorf függvény esetében található olyan $\{C_n\}$ görbesorozat, amely a bevezetés első tétele követelményeinek megfelel, és ez esetben a részlettörtes előállítás épp az adott alakú, azért a sor az egész síkon a

$$\frac{\pi}{\sin \pi z}$$

függvényt állítja elő.

4. Határozzuk meg az alábbi meromorf függvények részlettörtes előállítását:

a) $\operatorname{cosec}^2 z$;

b) $\operatorname{ctg} z$;

c) $\dfrac{2}{z^z - e^{-z}}$

5. Állítsuk elő zártabb alakban azt a meromorf függvényt, amelynek részlettörtes előállítása (kissé összevontabb alakban):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a}{(z + n\pi)^2 + a^2}.$$

6. Határozzuk meg az alábbi függvények részlettört-előállítását:

a) $\operatorname{tg} z$;

b) $\sin z \cdot \cos^{-2} z$;

c) $\pi^2 \cdot \cos^{-2} \pi z$;

d) $e^{az}(e^z - 1)^{-1}$; $0 < a < 1$;

e) $(\operatorname{ch} 2z - \cos 2z)^{-1}$;

f) $z \sin z\,(\sin z - z \cos z)^{-1}$.

7. Tekintsük az

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} - \frac{z}{\zeta^2} - \ldots - \frac{z^{m-1}}{\zeta^m} \right] d\zeta$$

integrálsorozatot, ahol a $\{C_n\}$ zárt JORDAN-görbesorozat olyan tulajdonságú, hogy a körülzárt terület és a kerület négyzetének viszonya korlátos marad.

Tegyük fel továbbá, hogy $f(z)$ meromorf függvény, amelynek pólusai $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ közül a C_n görbe épp az első n darabot zárja körül, továbbá, hogy az

$$\left| \frac{f(z)}{z^m} \right|$$

függvény a C_n görbesorozat mentén egyenletesen korlátos marad.

Igazoljuk, hogy ez esetben egyrészt

$$\lim_{n \to \infty} I_n(z) = 0$$

másrészt, hogy

$$T_n = f(z) - \sum_{k=1}^{n} \left[F_k\left(\frac{1}{z - a_k} \right) - F_k\left(-\frac{1}{a_k} \right) \right]$$

Ezzel lényegében a bevezetésben megadott tételt igazoltuk.

d)

β 1. Határozzuk meg a

$$w = \sin z$$

függvény (WEIERSTRASS-féle) szorzat-előállítását.

Megoldás: A $\sin z$ függvény nyilván transzcendens egész függvény. Zérushelyei a π egész számú többszörösei; megfelelően rendezve őket, az n-edik 0 hely:

$$z_n = (-1)^{n+1} 2\pi \left\{\frac{n}{2}\right\},$$

ahol $\left\{\frac{n}{2}\right\}$ az $\frac{n}{2}$-ben foglalt egészek számát jelenti.

Tekintettel arra, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^p}$$

sor $p = 2$ esetén már konvergens $\left(\text{hiszen a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ sor konvergál}\right)$, azért a WEIERSTRASS-féle szorzat-előállításban a gyöktényezők mellett fellépő exponenciális faktor kitevője egytagú lehet. Minthogy a szorzat az egész számsíkon abszolút konvergens, azért tényezői felcserélhetőek, és így az azonos abszolút értékű pozitív és negatív 0 helyeknek megfelelő faktorokat egymás mellett szerepeltethetjük. Így

$$\sin z \equiv e^{f(z)} \cdot z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) \cdot e^{\frac{z}{n\pi}}\right] \cdot \left[\left(1 + \frac{z}{n\pi}\right) e^{-\frac{z}{n\pi}}\right]$$

$$\equiv e^{f(z)} \cdot z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

ahol $f(z)$ egyelőre ismeretlen egész függvény. Ezt az egész függvényt legegyszerűbben úgy határozhatjuk meg, ha képezzük $\sin z$ logaritmikus deriváltját, és meghatározzuk annak részlettörtes előállítását:

$$\frac{d}{dz} \ln \sin z = \operatorname{ctg} z = \frac{df(z)}{dz} + \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2z}{n^2\pi^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}},$$

illetve más részről — mint a c) β) 1. feladatban láttuk —

$$\operatorname{ctg} z \equiv \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2\pi^2 - z^2}.$$

Ezek alapján

$$\frac{df(z)}{dz} \equiv 0 \quad \text{azaz} \quad f(z) = C.$$

A C ismeretlen állandó értékét igen egyszerűen, z-vel való osztás és $z \to 0$ határátmenet révén állapíthatjuk meg:

$$\frac{\sin z}{z} = e^C \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \qquad (z \neq 0)$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 = e^C \cdot \lim_{z\to 0} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) = e^C$$

azaz

$$e^C = 1; \quad C = 0$$

és így

$$\sin z \equiv z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények (WEIERSTRASS-féle) szorzat-előállítását:

a) $\cos \frac{\pi z}{2}$;

b) $\operatorname{ch} z - \cos z$;

c) $\sin z - z \cos z$;

d) $\frac{\sin \pi z}{\pi z(1 - z)}$.

3. Bizonyítsuk be, hogy érvényes a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(3n)!} \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{8 x_n^3}\right)$$

azonosság (ti. az egész számsíkon), ahol x_n a

$$2 \cos (x\sqrt{3}) + e^{-3x} = 0$$

valós egyenlet n-edik pozitív gyökét jelenti (növekvő sorrendben tekintve a — valós — gyököket).

Útbaigazítás: a $z = -u^3$, illetve a $z = u^3$ helyettesítést elvégezve, a megadott sort át lehet alakítani úgy, hogy az kifejezhető — zárt alakban is — egész függvényekkel. Ezután alkalmazhatjuk a (WEIERSTRASS-féle) szorzat-előállítási formulát.

4. Tekintsük az

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a^n}\right); \qquad (|a| > 1)$$

függvényt, és határozzuk meg MACLAURIN-sorának együtthatóit!

Megoldás: Azonnal leolvasható, hogy $f(z)$ transzcendens egész függvény — hiszen a megadott szorzat z bármely értékénél abszolút, és egyenletesen konvergál. A megadott szorzat egyszersmind az $f(z)$ függvény WEIERSTRASS-féle szorzat-előállítása, hiszen a függvény 0 helyeinek sorozata:

$$z_n = a^n,$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^p}$$

sor pedig már $p = 1$ esetén is konvergál, lévén $|a| > 1$.

Mármost az

$$f(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

előállításnál $c_0 = 1$ közvetlenül leolvasható.

Ezenkívül a szorzat-előállításból — illetve a gyökök elhelyezkedéséből — azonnal leolvasható, hogy

$$f(a\,z) \equiv (1 - z)\,f(z),$$

azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,a^n\,z^n \equiv (1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,z^n \equiv 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - C_{n-1})\,z^n,$$

amiből

$$c_1\,a = c_1 - c_0 = c_1 - 1$$

$$c_2\,a^2 = c_2 - c_1$$

$$\vdots$$

$$c_k\,a^k = c_k - c_{k-1}$$

$$\vdots$$

következik. Így

$$c_k = \frac{-c_{k-1}}{a^k - 1} = \frac{c_{k-2}}{(a^k - 1)\,(a^{k-1} - 1)} = \ldots = \frac{(-1)^k \cdot 1}{\prod_{n=1}^{k} (a^k - 1)}.$$

5. Tekintsük a

$$g(z) = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n\,z^2}{a^n}\right); \qquad (|\,a\,| > 1)$$

függvényt, és határozzuk meg MacLaurin sorának együtthatóit.

6. Fejezzük ki elemi függvények segítségével a

$$h(z) \equiv \left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{3\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{4\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{2\pi}\right)\ldots$$

függvényt.

Útbaigazítás: Ha a tényezők sorrendje szabadon lenne választható, nyilván a $\sin z$ szorzat-előállításának megfelelő alakra rendezhetnők át a végtelen szorzatot. Hiányoznak azonban az exponenciális faktorok, amelyek az *abszolút* konvergenciát, azaz a tényezők felcserélésének lehetőségét biztosítanák. Pótoljuk őket, és kompenzáljuk osztással a bevitt faktorokat.

7. Fejezzük ki egész függvények segítségével az

$$f_k(z) \equiv \left[1 + \left(\frac{k}{z}\right)^2\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{k}{2\pi - z}\right)^2\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{k}{2\pi + z}\right)^2\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{k}{4\pi - z}\right)^2\right] \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \left(\frac{k}{4\pi + z}\right)^2\right] \ldots$$

meromorf függvényt.

Útbaigazítás: Már a 2. § c) β) 3. feladat kapcsán említettük, hogy bármely meromorf függvény előállítható

$$e^{g(z)} \cdot \frac{h(z)}{k(z)}$$

alakban, ahol g, h és k egész függvények. Hogy a megadott végtelen szorzat meromorf függvényt állít elő, könnyen belátható, nem részletezzük. k, illetve h WEIERSTRASS-féle szorzat-előállítása azonnal adódik; leolvasható ugyanis, hogy $f(z)$ pólusai másodrendűek és a

$$z_n = \pm 2n\pi \qquad (n = 0, 1, 1, \ldots)$$

helyeken vannak, 0 helyei viszont egyszeresek, és a

$$z_s = \pm \left[\pm \frac{k}{i} - 2s\pi \right]; \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots)$$

helyeken vannak. Minthogy mindkét pontsorozat elég egyszerű felépítésű, azonnal megadhatóak olyan egész függvények is, amelyek 0 helyei — a megadott multiplicitással — épp az adott helyeken vannak. Így pl. élhetünk a következő választással:

$$k(z) = 1 - \cos z; \qquad h(z) = \operatorname{ch} k - \cos z.$$

A $g(z)$ egész függvény megállapítása itt is a logaritmikus derivált segítségével történhet. Így adódik az

$$f(z) \equiv \frac{\operatorname{ch} k - \cos z}{1 - \cos z}$$

eredmény.

8. Fejezzük ki egész függvények segítségével a

$$g(z; k; n) = \left[1 + \left(\frac{k}{z}\right)^n\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{k}{2\pi - z}\right)^n\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{k}{2\pi + z}\right)^n\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{k}{4\pi - z}\right)^n\right] \cdots$$

függvényt. (n pozitív páros szám.)

9. Fejezzük ki egész függvényekkel azt a $g(z)$ meromorf függvényt, amely az egész számsíkon kielégíti a

$$g(z + 1) \equiv z\, g(z)$$

függvényegyenletet, és amelyre

$$g(1) = 1.$$

Útbaigazítás: Elsősorban azt kell belátnunk, hogy létezik olyan függvény, amely a feltételeket kielégíti. A közvetlenebb, de bonyolultabb út a következő: Formálisan felírva $g(z)$ hatványsorát pl. a $z = 2$ helyen, az együtthatókat a definiáló függvényegyenlet alapján könnyen számíthatjuk. Nem nehéz annak igazolása sem, hogy e hatványsor konvergenciakörének sugara 2 egységnyi. A függvényegyenletből azonnal leolvasható, hogy a $z = 0$ pontban a függvénynek pólusa van $\frac{1}{z}$ fő résszel, majd ennek

alapján az is, hogy a valós tengely minden negatív egész helyén pólusa van a függvénynek, sőt a fő részek is könnyen számíthatóak a definiáló függvényegyenlet alapján. Lényegesen nehezebb feladat azonban annak bizonyítása, hogy a kiindulási függvényelem analitikusan folytatható az egész síkra, és hogy így egyértékű függvényt kapunk, amelynek az előbb említett pólushelyek kivételével más szingularitása nincs. Azonban a függvényegyenletre támaszkodva, a 2. § *a) γ)* rész feladataiban ismertetett gondolatmenet megfordításával elvégezhető a számítás. Így az is látható, hogy a feltételek a függvényt egyértelműen határozzák meg.

Távolabb fekvő, de egyszerűbben keresztül vihető a következő gondolatmenet: $g(z)$ második logaritmikus deriváltja — amelyet $D(z)$-vel jelölünk — nyilván kielégíti a

$$D(z+1) \equiv -\frac{1}{z^2} + D(z)$$

függvényegyenletet, vagy a konklúziót iterálva, általában a

$$D(z) \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(z+k)^2} + D(z+n+1) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

relációkat. Mármost az

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}$$

meromorf függvény a $D(z)$-re vonatkozó függvényegyenletet nyilván kielégíti, s így — ha az eredeti problémának van, éspedig egyetlen megoldása van — nyilván fennáll az $f(z) \equiv D(z)$ azonosság.

Formálisan visszatérve $f(z)$-ről $g(z)$-re, ellenőrizhetjük, hogy valóban teljesülnek-e az így kapott függvényre a követelmények. Így adódik a

$$g(z) \equiv \frac{e^{-Cz}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}}$$

reláció, ahol C az ún. EULER-állandó:

$$C = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right\}.$$

10. Adjuk meg az előbbi feladatban definiált $g(z)$ függvény (MITTAG—LEFFLER-féle) részlettörtes előállítását is.

11. Írjuk fel a

$$w = \operatorname{tg} z$$

meromorf függvényt két (gyöktényezős alakban előállított) egész függvény hányadosaként.

e)

α | 1. Írjuk fel az

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t}\,dt$$

függvény aszimptotikus sorát. Állapítsuk meg ennek segítségével közelítően $f(10)$ értékét, és adjunk hibabecslést!

Megoldás: Kézenfekvőnek látszik a parciális integrálás megkísérlése; a kapott eredmény alakja szuggerálja, hogy folytassuk az eljárást. n lépés után így az

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} \pm \ldots + \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}} + (-1)^{n+1} \cdot (n+1)! \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\,dt$$

formulára jutunk.

Feltehető tehát, hogy érvényes az

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$$

aszimptotikus kifejtés. Ezt könnyű ellenőrizni, hiszen az alkalmazott módszer közvetlenül szolgáltatja az „aszimptotikus sormaradékot", $R_n(x)$-et:

$$R_n(x) = x^n \{f(x) - S_n(x)\} = (-1)^{n+1} x^n \cdot (n+1)! \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\,dt.$$

Azt kell mármost igazolnunk, hogy egyrészt

$$\lim_{x\to\infty} R_n(x) = 0$$

másrészt, hogy

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \infty.$$

E célból — aránylag durva — alsó és felső becslést adunk először az

$$(n+1)! \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\,dt$$

integrálra. A felső becslésnél felhasználhatjuk, hogy az integrációs tartományban

$$x - t \leqq 0, \quad \text{azaz} \quad e^{x-t} \leqq 1$$

az alsó becslésnél viszont pl. rövidíthetjük az integrációs utat. Azaz egyrészt

$$(n+1)! \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\,dt < (n+1)! \int_x^\infty \frac{dt}{t^{n+2}} = \frac{n!}{x^{n+1}},$$

másrészt pl.

$$(n+1)!\int_x^{\infty}\frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\,dt > (n+1)!\int_x^{x+1}\frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\,dt > (n+1)!\,\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{(x+1)^{n+2}}.$$

Ezt helyettesítve, a következő egyenlőtlenségrendszer adódik:

$$\frac{1}{e}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n\cdot\frac{(n+1)!}{(x+1)^2} < |R_n(x)| < \frac{n!}{x},$$

amiből mindkét állított limeszreláció közvetlenül leolvasható.

$f(10)$ értékét számolva közelítően, kiindulhatunk a hibára adott felső becslésből: $n!\,x^{-(n+1)}$-ből. Ez azt mutatja, hogy $x = 10$ esetén $n = 9$ tagot célszerű felhasználni a sorból, a hiba így

$$|H| < \frac{9!}{10^{10}} = 362880\cdot 10^{-10} \sim 3{,}63\cdot 10^{-5}$$

nagyságú. $f(10)$ tehát négy tizedesjegyre pontosan:

$$f(10) \simeq 0{,}0916.$$

2. Legyen $0 < C < 1$, és tekintsük az

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C^k}{z+k}$$

meromorf függvényt. Határozzuk meg e függvény aszimptotikus sorát, és adjunk pontos kifejezést és jól használható becslést a „maradékra".

Útbaigazítás: Fejtsük sorba az egyes tagokat $\frac{1}{z}$ hatványai szerint, és vonjuk össze $\frac{1}{z}$ azonos hatványait.

3. Határozzuk meg az alábbi függvények aszimptotikus sorát:

a) $f(z) = \int_z^{\infty} e^{z^2-t^2}\,dt,$

éspedig a $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ tartományban.

b) $g(x) = \int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt.$

c) $h(z) = e^z\cdot z^{-a}\int_z^{\infty} e^{-x}\cdot x^{a-1}\,dx.$

4. Igazoljuk, hogy érvényesek az alábbi aszimptotikus kifejtések:

$$a)\quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{t^2+x^2}\,dx \sim \frac{1}{t^2} - \frac{2!}{t^4} + \frac{4!}{t^6} - + \ldots + (-1)^m \frac{(2m)!}{t^{2m+2}} \pm \ldots$$

$$b)\quad \int_t^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \sim \sin t \left\{\frac{1}{t^2} - \frac{3!}{t^4} + \frac{5!}{t^6} - + \ldots\right\} + \cos t \left\{\frac{1}{t} - \frac{2!}{t^3} + \frac{4!}{t^5} - + \ldots\right\}.$$

Útbaigazítás a *b)* feladathoz: végezzük el először az $x = v + t$ helyettesítést; az integrandusban ezután fellépő $\frac{1}{v+t}$ faktort egy határozott integrállal helyettesíthetjük:

$$\frac{1}{v+t} = \int_0^{\infty} e^{-u(v+t)}\,du.$$

A két integrálás sorrendje felcserélhető (ezt igazoljuk!), a „belső" integrálás elvégezhető, és így ugyanolyan típusú integrálhoz jutunk, mint a megelőző példákban.

$$c)\quad f(x) \equiv \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^{2v+1}}{(2v+1)!!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{x} + \frac{2!}{1!\,2^1}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{4!}{2!\,2^2}\cdot\frac{1}{x^5} + \\ + \frac{6!}{3!\,2^3}\cdot\frac{1}{x^7} - + \ldots$$

Útbaigazítás a *c)* feladathoz: $f(x)$ integrálalakban könnyen előállítható. Ugyanis a sort differenciálva, ebből az állandó tagot levonva, és x-szel osztva, az

$$\frac{1}{x}[f' - 1] \equiv f$$

azonosságot kapjuk. A differenciálegyenlet integrálása után ugyanúgy járhatunk el, mint az eddigi feladatoknál.

β | 1. Adjunk aszimptotikus kifejezést az $\ln(n!)$ értékének kiszámítására.

Megoldás:

$$\ln(n!) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln k.$$

Alkalmazhatjuk tehát az EULER-féle összegező formulát, éspedig pl. az $f(x) \equiv \ln(x+1)$ választással. Eszerint:

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(k+1) =$$

$$= \int_0^{n-1} \ln(x+1)\,dx + \frac{1}{2}[\ln 1 + \ln n] + \frac{B_1}{2!}\left[\frac{1}{n} - 1\right] - \frac{B_2}{4!}\left[\frac{2!}{n^3} - \frac{2!}{1}\right] + - \ldots +$$

$$+ (-1)^m \frac{B_{m+1}}{(2m+2)!}\left[\frac{(2m)!}{n^{2m+1}} - \frac{(2m)!}{1}\right] + (-1)^m \int_0^{n} B_{2m+3}(x)\,\frac{(2m+2)!}{(1+x)^{2m+3}}\,dx.$$

Ez a formula ebben az alakban jól alkalmazható a numerikus számoláshoz, aszimptotikus formulát azonban nem tudunk származtatni a segítségével. Ha ugyanis megpróbáljuk szétválasztani (ti. külön összegbe) az $\frac{1}{n}$ hatványait és az állandókat, akkor az első összeg csakis akkor adhat aszimptotikus sort, ha n bármely rögzített értékénél divergens sort ad (ez akkor következik be, ha a B_m számok elég gyorsan nőnek; a $B_m(x)$ függvényeket megadó FOURIER-sorból, illetve a B_m számok definíciójából azonnal leolvasható, hogy

$$B_m = O\left[\frac{(2m)!}{(2\pi)^{2m}}\right],$$

azaz a B_m számok valóban oly gyorsan nőnek, hogy a kapott sor divergens). Ekkor azonban divergens lesz nyilván az állandók összege is.

Az eredeti formulát azonban könnyen át lehet alakítani úgy, hogy az alkalmas legyen aszimptotikus formulák származtatására is: az Euler-féle összegképlet levezetésénél szereplő valamelyik integrált, pl. a

$$(-1)^m \int_0^n B_{2m+3}(x)\, f^{(2m+3)}(x)\, dx$$

integrált így írjuk fel:

$$(-1)^m \int_0^\infty B_{2m+3}(x)\, f^{(2m+3)}(x)\, dx - \int_n^\infty B_{2m+3}(x) \cdot f^{(2m+3)}(x)\, dx$$

(itt m értékét úgy kell megválasztani, hogy a kapott improprius integrálok konvergensek legyenek). Mármost itt az első tag n-től független, a második tagra pedig az eljárást folytathatjuk. Így kapjuk a következő általános formulát:

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)\, dx + \frac{1}{2}[f(0) + f(n)] + \frac{B_1}{2!}[f'(n) - f'(0)] \mp \ldots +$$

$$+ (-1)^m \frac{B_{m+1}}{(2m+2)!}[f^{(2m+1)}(n) - f^{(2m+1)}(0)] + (-1)^m \int_0^\infty B_{2m+3}(x)\, f^{2m+3}(x)\, dx +$$

$$+ (-1)^{m+1} \frac{B^{m+2}}{(2m+4)!} f^{(2m+3)}(n) + \ldots + (-1)^{m+k} \frac{B_{m+k+1}}{(2m+2k+2)!} f^{(2m+2k+1)}(n) +$$

$$+ (-1)^{m+k+2} \int_n^\infty B_{2m+2k+3}(x)\, f^{2m+2k+3}(x)\, dx.$$

A mi esetünkben pl. már az első lépésben felbonthatjuk az integrált, és így a következő adódik:

$$\ln(n!) = (n-1)\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\ln n - \int_0^\infty \frac{B_1(x)}{1+x}\, dx +$$

$$+ \frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{B_2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{n^3} + \frac{B_3}{5\cdot 6}\cdot\frac{1}{n^5} - + \ldots + (-1)^{m-1}(2m)! \int_n^\infty \frac{B_{2m+1}(x)}{(1+x)^{2m+1}}\, dx,$$

amiből az aszimptotikus formula is, a maradéktag is leolvasható. Nem nehéz egyébként az

$$1 - \int_0^\infty \frac{B_1(x)}{1+x}\,dx = \ln \sqrt{2\pi}$$

reláció igazolása sem, ha felhasználjuk $B_1(x)$ definícióját és az ún. WALLIS-formulát. Végül tehát:

$$\ln(n!) \sim \ln \sqrt{2\pi} + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{B_2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{n^3} + \frac{B_3}{5\cdot 6}\cdot\frac{1}{n^5} - + \ldots$$

2. Legyen $\sigma > 1$. Határozzuk meg a

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\sigma}$$

sor aszimptotikus előállítását és az „aszimptotikus sormaradékot".

3. Adjunk aszimptotikus kifejtést a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

formula részére.

4. Igazoljuk a következő aszimptotikus kifejtést:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \sim C + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + \frac{\ln n}{2n} + \frac{1 - \ln n}{12\,n^2} + \frac{6\ln n - 11}{720\,n^4} + \ldots,$$

ahol $C = -0{,}072815\ldots$

5. Számítsuk ki az EULER-féle összegképlet alapján az alábbi sorok értékét 4 tizedesjegynyi pontossággal:

$$a)\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}; \qquad b)\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^2}; \qquad c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}.$$

γ

1. Határozzuk meg a nyeregpontmódszer segítségével az

$$T_n = \int_0^{z_1} z^{\alpha-1} F(z)\cdot e^{nf(z)}\,dz$$

integrál értékét $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\operatorname{Re}\alpha+1}{p}}$ nagyságrendű hibával, ahol is az $f(z)$ és $F(z)$ függvények regulárisak egy olyan tartományban, amely az integrációs utat tartalmazza. Legyen továbbá

$$\operatorname{Re}\alpha > 0; \qquad f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(p-1)}(0) = 0; \qquad f^{(p)}(0) \neq 0;$$

$p \geqq 2$, és végül: z_1 valamelyik negatív szektorban fekszik.

Megoldás: Legyen $F(z)$, illetve $f(z)$ MACLAURIN-sora:

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

$$f(z) = z^p [b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots]; \quad p \geqq 2; \quad b_0 \neq 0$$

alakú, a konvergenciakör sugarát pedig jelölje ϱ_F, illetve ϱ_f. Elsősorban a $z = 0$ pont környezetében (amely $f(z)$-nek nyeregpontja, az integrandusnak pedig általában — kivéve az $\alpha =$ természetes szám esetét — elágazási pontja) kell tisztáznunk az integrációs utat. Ennek egy negatív szektorban kell haladnia, a legmeredekebb „esés" irányában indulva $z = 0$-ból. $f(z)$ valós, illetve képzetes részének viselkedését vizsgálandó az origo környezetében, vezessük be a

$$z = r e^{i\varphi} \quad \text{és} \quad b_\nu = B_\nu e^{i\beta_\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

és a $\mathrm{Re}\, f = u$; $\mathrm{Im}\, f = v$ jelöléseket. Így

$$u(r, \varphi) = r^p \{B_0 \cos(p\varphi + \beta_0) + r B_1 \cos[(\varphi + 1)\varphi + \beta_1] + \ldots\}$$

illetve

$$v(r, \varphi) = r^p \{B_0 \sin(p\varphi + \beta_0) + r B_1 \sin[(p + 1)\varphi + \beta_1] + \ldots\}.$$

Mármost az az irány, amely mentén u a leggyorsabban változik, a következőképp keresheto meg: u az origóban nyilván 0; megvizsgáljuk, hogy egy tetszőleges $r = \varrho =$ $=$ const körön φ mely értéke mellett veszi fel szélső értékét, és e szélső értéket kijelölő szög mihez tart, ha $\varrho \to 0$.* Részletesen:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{r=\varrho} = \varrho^p \{-p B_0 \sin(p\varphi + \beta_0) - (p + 1)\varrho B_1 \sin[(p + 1)\varphi + \beta_1] - \ldots\},$$

azaz a szélső érték a

$$-p B_0 \sin(p\varphi + \beta_0) - (p + 1)\varrho B_1 \sin[(p + 1)\varphi + \beta_1] - \ldots = 0$$

egyenlet $\varphi = \varphi(\varrho)$ megoldásainál található. ϱ elegendően kis értékeinél az egyenlet megoldásai ϱ-nak folytonos függvényei, és így a $\varrho \to 0$ határátmenetet az egyenletben végezhetjük el. Így az origóban az u leggyorsabb változását kijelölő irányok a

$$-p B_0 \sin(p\varphi + \beta_0) = 0$$

egyenlet megoldásai, azaz a

$$\varphi_m = \frac{m\pi - \beta_0}{p} = -\frac{\beta_0}{p} + m\frac{\pi}{p} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, p - 1)$$

irányok. Azonnal leolvasható, hogy ugyanilyen érintővel indulnak az origóból a

$$v(r, \varphi) = \text{const} = v(r = 0) = 0$$

nívóvonalak is, míg az

$$u(r, \varphi) = \text{const} = u(r = 0) = 0$$

* Ugyanez az irány adódik természetesen, ha az iránymenti derivált szélső értékét keressük, gyakorlatképp mutassuk ezt ki!

nívóvonalak a

$$\varphi_n = -\frac{\beta_0}{p} + \frac{2n+1}{2p}\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$$

irányokban húzódnak, azaz előbbiek az utóbbiak szögfelezői (és megfordítva). Az is leolvasható, hogy a negatív szektorok, ahol is tehát $u(r, \varphi) < 0$, a legmeredekebb irányt jelző φ_m egyenesek közül az m páratlan értékeihez tartozókat tartalmazzák.

Visszatérve tehát az eredeti integrálhoz, az integrációs utat a következő szakaszokból rakjuk össze:

1. Egy egyenesdarabból, amely az origót a $z_0 = r_0 e^{i\Psi_0}$ ponttal összeköti. E pontot úgy választjuk, hogy benne legyen a felírt MACLAURIN-sorok konvergenciatartományában, azaz legyen $r_0 < \varrho_F$ és $r_0 < \varrho_f$, továbbá ugyanabban a negatív szektorban (legyen ez a $2k+1$-edik) feküdjék, mint z_1, és e szektor legmeredekebb esési vonalának $z = 0$-beli érintőjén is feküdjék rajta, tehát legyen

$$\Psi_0 = -\frac{\beta_0}{p} + (2k+1)\frac{\pi}{p}.$$

Megjegyezzük, hogy r_0 még egy további kikötésnek is tartozik eleget tenni a fentiek alapján: ha a fenti Ψ_0-lal jelzett irányú egyenes a $2k+1$-edik szektort határoló görbék valamelyikét az origótól számítva legközelebb ϱ_m távolságban metszi, akkor — hogy z_0 valóban ugyanabban a szektorban feküdjék, mint z_1 — szükségképp fennáll az $r_0 < \varrho_m$ egyenlőtlenség is.

2. z_0-t z_1-gyel egy tetszőleges, teljesen a regularitási tartomány és a z_1 által kijelölt negatív szektor belsejében haladó görbével kötjük össze.

Az I_n integrál két részét $I_{n;1}$, illetve $I_{n;2}$-vel jelölve, $I_{n;2}$-re azonnal adhatunk jó becslést. Ugyanis az integrációs utat teljesen egy meghatározott negatív szektor belsejében választottuk, s így ezen út mentén, a kezdőpont kivételével, mindenütt fennáll az

$$u(z) < 0 \quad \text{azaz az} \quad |e^{f(z)}| < 1$$

feltétel. Ha pedig már r_0 távolságra eltávolodtunk az origótól, akkor fennáll az

$$u(z) \leqq u_0 < 0, \quad \text{azaz} \quad |e^{f(z)}| \leqq 1 - f < 1$$

egyenlőtlenség is, ahol az $1 > f > 0$ állandó értéke csakis attól függ, hogy a második útszakasz milyen erősen közelíti meg maximálisan az origót, illetve a kérdéses negatív szektor határait. Mindenesetre r_0 rögzítése után — megfelelően választva a második útszakaszt — f értéke megadható. Ekkor azonban érvényes az

$$I_{n;2} = O[(1-f)^n]$$

becslés, hiszen $|e^{nf(z)}| = |e^{f(z)}|^n$. Minthogy pedig egy 1-nél kisebb szám növekvő hatványai gyorsabban csökkennek, mint n bármely hatványa, azért

$$I_{n;2} = O\left[n^{-\frac{\operatorname{Re}\alpha+1}{p}}\right].*$$

* $O(\alpha_n)$ — olvasd (nagy) ordó α_n — olyan n-től függő mennyiséget jelöl, amely α_n-nel osztva, korlátos marad, ha $n \to \infty$. Hasonlóképp $o(\alpha_n)$ — olvasd (kis) ordó α_n — olyan mennyiséget, amely α_n-nel osztva, zérushoz tart, ha $n \to \infty$.

Áttérünk most $I_{n;1}$, azaz

$$\int_0^{r_0 e^{i\varphi_0}} z^{\alpha-1} F(z)\, e^{nf(z)}\, dz = \int_0^{r_0 e^{i\varphi_0}} z^{\alpha-1} F(z)\, e^{nf(z)} \cdot e^{i\varphi_0}\, dr$$

számítására. A kérdéses integrációs úton:

$$F(z) \cdot e^{nf(z)} = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots) \cdot e^{n(b_0 z^p + b_1 z^{p+1} + \cdots)} =$$

$$= (a_0 + a_1 z + \ldots) \cdot e^{nb_0 z^p} \cdot e^{(nb_1 z^{p+1} + nb_2 z^{p+2} + \cdots)} = a_0\, e^{nb_0 z^p} + e^{nb_0 z^p} \cdot \psi(z),$$

ahol $\psi(z) = (a_0 + a_1 z + \ldots)\, e^{nz^p(b_1 z + b_2 z^2 + \cdots)} - a_0 = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$

Hogy $\psi(z)$ hatványsora valóban konstans tag nélküli, az közvetlenül leolvasható. Hiszen $\psi(0) = a_0 \cdot 1 - a_0 = 0$.

Így

$$I_{n;1} = a_0 \int_0^{r_0 e^{i\varphi_0}} z^{\alpha-1} \cdot e^{nb_0 z^p}\, dz + \int_0^{r_0 e^{i\varphi_0}} z^{\alpha-1} \cdot e^{nb_0 z^p}\, \psi(z)\, dz = I_n^* + I_n^{**}.$$

Mármost I_n^* adja az integrál fő részét, I_n^{**} értékét pedig a hibához csapjuk (ti. $\psi(z)$ a $z = 0$ helyen — a kritikus helyen — 0-val egyenlő), és így azt csak becsülnünk kell. Ehhez $\psi(z)$ megfelelő becslését kell megadnunk, amelyhez így juthatunk el: Ismeretes, hogy a

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

reguláris függvényelem együtthatóit — a CAUCHY-féle integrálelőállítás birtokában — könnyen becsülhetjük. Ha pl. R egy, a sor ϱ_F konvergenciasugaránál kisebb szám, és M_R-rel jelöljük az $|F(z)|_{|z|=R}$ függvény maximumát, akkor

$$|a_k| \leqq \frac{M_R}{R^k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$f(z)$ együtthatóit is ugyanezen elv alapján becsülhetjük. Itt azonban kissé másképp járunk el, mert $f(z)$ exponensben van, s így, ha lehet, az exponensben szereplő együtthatókkal valamely logaritmikus függvényhez szeretnénk eljutni. Erre is lehetőségünk van, mert ismeretes, hogy az

$$f^*(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

és deriváltja, a

$$\frac{d}{dz} f^*(z) = b_1 + 2 b_2 z + 3 b_3 z^2 + \ldots$$

függvény MACLAURIN-sorának ugyanaz a konvergenciasugara. Legyen tehát

$$R < \varrho_F \quad \text{és} \quad R < \varrho_f = \varrho_{f^*} = \varrho_{f^{*'}};$$

továbbá M olyan szám, amely nagyobb, mint a

$$\max_{|z|=R} |F(z)| \quad \text{és a} \quad \max_{|z|=R} \left| \frac{d}{dz} f^*(z) \right|$$

számok közül a nagyobbik. Ekkor

$$|a_k| \leqq \frac{M}{R^k} \quad \text{és} \quad k\,|b_k| \leqq \frac{M}{R^k}, \quad \text{azaz} \quad |b_k| \leqq \frac{M}{k\,R^k}.$$

A becslés most már nem nehéz, bár némi ügyeskedést igényel a majoráns kifejezés egy olyan alakba rendezése, amelyben ki van emelve a lényeges z faktor:

$$|\psi(z)| = |(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots) e^{nz^p(b_1 z + b_2 z^2 + \cdots)} - a_0|$$

$$< \left| \left(M + M \frac{|z|}{R} + M \frac{|z|^2}{R^2} + \ldots \right) e^{nz^p \left(\frac{M}{1} \frac{|z|}{R} + \frac{M}{2} \frac{|z|^2}{R^2} + \frac{M}{3} \frac{|z|^3}{R^3} + \cdots \right)} - M \right| {}^* =$$

$$= \left| M \frac{1}{1 - \frac{|z|}{R}} e^{n|z|^p M \cdot \ln\left(1 - \frac{|z|}{R}\right)} - M \right| = M \left| \left(1 - \frac{|z|}{R}\right)^{-1 - Mn|z|^p} - 1 \right| =$$

$$= M \left| 1 - \left(\frac{-1 - Mn|z|^p}{1} \right) \frac{|z|}{R} + \left(\frac{-1 - Mn|z|^p}{2} \right) \frac{|z|^2}{R^2} - + \ldots - 1 \right| =$$

$$= M \frac{|z|}{R} \left| \frac{1 + Mn|z|^p}{1} + \frac{(1 + Mn|z|^p)(2 + Mn|z|^p)}{2!} \frac{|z|}{R} + \ldots \right| \leqq$$

$$= M \frac{|z|}{R} \left| 1 + Mn|z|^p \right| \left| 1 + \left(1 + \frac{Mn|z|^p}{2} \right) \frac{|z|}{R} + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{Mn|z|^p}{2} \right) \left(1 + \frac{Mn|z|^p}{3} \right) \frac{|z|^2}{R^2} + \ldots \right|$$

$$< M \frac{|z|}{R} \left| 1 + Mn|z|^p \right| \left| 1 + \left(1 + \frac{Mn|z|^p}{1} \right) \frac{|z|}{R} + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{Mn|z|^p}{1} \right) \left(1 + \frac{Mn|z|^p}{2} \right) \frac{|z|^2}{R^2} + \ldots \right|$$

$$= M \frac{|z|}{R} \left| 1 + Mn|z|^p \right| \left| \left(1 - \frac{|z|}{R}\right)^{-1 - Mn|z|^p} \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{M}{R} |z| (1 + Mn|z|^p) \left| 1 - \frac{|z|}{R} \right|^{-1 - Mn|z|^p}.$$

Mármost — a $\psi(z)$-re vonatkozó becslés birtokában — I_n^* számítása is, I_n^{**} becslése is lényegesen egyszerűsödik a

$$z = e^{i\psi_0} \sqrt[p]{\frac{t}{nB_0}}$$

* A becslés alapelve itt a következő: Jelöljük $\psi^*(z)$-vel a $\psi(z) + a_0$ függvényt. A $\psi^*(z)$-ben szereplő két hatványsor mindegyikében az együtthatók helyébe náluk abszolút értékre nagyobb pozitív számot írtunk. Így egy $\varPsi^*(z)$ függvényhez jutottunk. Nyilván

$$\varPsi^*(|z|) = |\varPsi^*(|z|)| \geqq |\psi^*(z)|.$$

Minthogy pedig

$$\psi(z) = \psi^*(z) - \psi^*(0),$$

azért nyilván

$$\varPsi^*(|z|) - \varPsi^*(0) = |\varPsi^*(|z|) - \varPsi^*(0)| \geqq |\psi^*(z) - \psi^*(0)| = |\psi(z)|,$$

minthogy a $\psi^*(z) - \psi^*(0) = \Delta\psi^*(z)$ együtthatóinak abszolút értékét is növeltük az együtthatók helyettesítésénél.

reláció révén történő változócserével. Igy ugyanis érvényes az

$$n z^p = -\frac{t}{B_0} e^{i\beta_0} \quad \text{egyenlőség, hiszen } p\,\psi_0 = \beta_0 + (2k+1)\pi,$$

a ψ_0 definíciója szerint. Ezt helyettesítve:

$$I_n^* = \frac{1}{p} e^{i\alpha\psi_0} \left|\frac{1}{nB_0}\right|^{\frac{a}{p}} a_0 \int_0^{nB_0 r_0^p} e^{-t} \cdot t^{\frac{a}{p}-1}\, dt;$$

$$|I_n^{**}| \leqq \frac{1}{p} e^{i\alpha\psi_0} \left|\frac{1}{nB_0}\right|^{\frac{a}{p}} \int_0^{nB_0 r_0^p} e^{-t}\, t^{\frac{a}{p}-1} |\psi(z)|\, dt.$$

$\psi(z)$-ben is elvégezve a helyettesítést, és figyelembe véve, hogy R választható úgy, hogy nagyobb legyen r_0-nál, azaz hogy az integrációs út mentén

$$|z| = \left|\frac{t}{nB_0}\right|^{\frac{1}{p}} \leqq r_0 < R,$$

$|\psi(z)|$-re ez a becslés adódik az integrációs úton

$$|\psi(z)| \leqq \left|1 + \frac{Mt}{B_0}\right| M \frac{1}{R} \sqrt[p]{\frac{t}{nB_0}} \left(1 - \frac{r_0}{R}\right)^{-1-\frac{Mt}{B_0}}.$$

Ezt helyettesítve, egyszerű számolással adódik az

$$I_n^{**} = O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\mathrm{Re}\,\alpha+1}{2}}\right]$$

becslés.

Fennáll tehát az

$$I_n = I_n^* + O\left[\left|\frac{1}{n}\right|^{\frac{\mathrm{Re}\,\alpha+1}{p}}\right]$$

aszimptotikus reláció.

2. Határozzuk meg az 1. feladatban szereplő I_n integrál értékét, éspedig egy

$$\left|\frac{1}{n}\right|^{\frac{\mathrm{Re}\,\alpha+s}{p}}$$

nagyságrendű hibával, ahol $s > 1$.

Útbaigazítás: Az

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)\, e^{n(b_0 z^p + b_1 z^{p+1} + \cdots)}$$

kifejezésben s tagot kell az exponensből *pontosan* figyelembe vennünk, és a maradékot az 1. feladatban közölt módszerhez hasonlóan becsülnünk.

3. Határozzuk meg az

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\frac{1}{2}} \frac{1}{z + i\alpha} e^{n(z^3 - z^2)}\, dz$$

integrál aszimptotikus kifejtését $O\left|\frac{1}{n}\right|$ hibával; α kis (rögzített) pozitív számot jelöl.

Megoldás: Az

$$f(z) = z^3 - z^2 = z^2(-1 + z)$$

függvénynek az origóban van nyeregpontja. A 2. § *e) γ)* 1. feladat jelöléseit használva,

$$b_0 = -1 = 1 \cdot e^{-i\pi}, \quad \text{azaz} \quad \beta_0 = \pi; \quad B_0 = 1.$$

A negatív szektorok legmeredekebb esésű irányainak irányszöge:

$$\varphi_m = -\frac{\pi}{2} + (2m + 1)\frac{\pi}{2},$$

azaz a valós tengely adódik mindkét irányban; ugyanitt van az (origótól számítva) az integrációs út mindkét végpontja.

Első lépésben leválasztjuk az

$$\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{z + i\alpha} e^{n(z^3 - z^2)}\, dz = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x + i\alpha} e^{n(x^3 - x^2)}\, dx$$

integrált; becslését azonban későbbre halasztjuk, minthogy a becslésnél elérendő pontosság mértékét egyrészt a fő rész nagyságrendje, másrészt a nyeregpont környezetében már *csak becsült* integrálrészek *becslési jósága* határozza meg.

Tekintsük tehát előbb az

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z + i\alpha} e^{n(z^3 - z^2)}\, dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x + i\alpha} e^{n(x^3 - x^2)}\, dx$$

(x valós szám) integrált. Ezen integrál aszimptotikus becslésénél két utat követhetünk. Az első a 2. § *e) γ)* 1., illetve 2. feladat mintájára építhető fel, a második viszont arra épít, hogy az

$$F(x) = \int_x^{\infty} e^{-t^2}\, dt$$

függvény (ún. nem teljes LAPLACE-integrál) tabellázva van. Mindkét módszernél csak a legalacsonyabb fokszámú tagot vesszük figyelembe az $f(z)$ függvénynél, azaz így választunk szét:

$$e^{n(x^3 - x^2)} = e^{-nx^2} \cdot e^{nx^3} = e^{-nx^2}\,[1 + h(x)],$$

ahol

$$h(x) = \frac{n x^3}{1!} + \frac{n^2 x^6}{2!} + \frac{n^3 x^9}{3!} + \ldots ;$$

$$|h(x)| \leqq n |x|^3 \left\{1 + \frac{n|x|^3}{2!} + \frac{n^2 |x|^6}{3!} + \ldots\right\} \leqq n |x|^3 \left\{1 + \frac{n|x|^3}{1!} + \right.$$

$$\left. + \frac{n^2 |x|^6}{2!} + \ldots\right\} = n |x|^3 e^{n|x|^3} .$$

Így

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x + i\alpha} e^{n(x^3 - x^2)}\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-nx^2}}{x + i\alpha}\, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{h(x)\, e^{-nx^2}}{x + i\alpha}\, dx .$$

Mármost először az első tag számítását mutatjuk be a két úton:

1. Az $\frac{1}{x + i\alpha}$ függvényt az $x = 0$ hely körül sorba fejtjük, és a sor első fokú szeletét figyelembe vesszük, a többit a hibataghoz csapjuk (azért álltunk meg az első fokú szeletnél, mert $e^{n(x^3 - x^2)}$ lebontásánál ugyan harmadrendű taggal kezdődik a hibarész, de ennek n nagyságú szorzója is van; várható, hogy a másik sorfejtésnél n szorzó nélkül már a másodrendű hibatag sem ad nagyobb nagyságrendű hibát):

$$\frac{1}{x + i\alpha} = -\frac{i}{\alpha}\left[1 - \frac{x}{i\alpha} + \left(\frac{x^2}{(i\alpha)^2} - \frac{x^3}{(i\alpha)^3} + - \ldots\right)\right] = -\frac{i}{\alpha} + \frac{x}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\alpha^2}\, \frac{1}{x + i\alpha} .$$

A főrész tehát:

$$\int_{-\frac{1}{1}}^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{i}{\alpha} + \frac{x}{\alpha^2}\right] e^{-nx^2}\, dx = -\frac{i}{\alpha} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-nx^2}\, dx$$

lenne, amit nyilván

$$-\frac{i}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2}\, dx\text{-re}$$

egészítünk ki, hogy az integrálás zárt alakban is elvégezhető legyen, a hibatagok pedig, amelyeket becsülnünk kell:

$$\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{n(x^3 - x^2)}}{x + i\alpha}\, dx ; \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{h(x)\, e^{-nx^2}}{x + i\alpha}\, dx ; \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\alpha^2} \cdot \frac{e^{-nx^2}}{x + i\alpha}\, dx,$$

és végül

$$2\frac{i}{\alpha}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-nx^2}\,dx.$$

A főrész értéke ($\sqrt{n}\,x = u$ helyettesítéssel):

$$-\frac{i}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2}\,dx = -\frac{i}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = -\frac{2\sqrt{\pi}\,i}{\alpha\sqrt{n}},$$

a hibatagokat tehát $\frac{1}{\sqrt{n}}$-nél kisebb nagyságrendig kell becsülnünk.

Mármost az első integrál exponenciálisan kicsiny. Ugyanis

$$x^3 - x^2 < -x^2, \quad \text{ha} \quad x < 0; \qquad \left|\frac{1}{x+i\alpha}\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}}}, \quad \text{ha} \quad x \leqq -\frac{1}{2}.$$

Tehát

$$\left|\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{n(x^3-x^2)}}{x+i\alpha}\,dx\right| < \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}}}\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} e^{-nx^2}\,dx = \frac{e^{-\frac{n}{4}}}{\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}}}\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} e^{-n\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}\,dx =$$

$$= \frac{e^{-\frac{n}{4}}}{\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}}}\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} e^{-n\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}\,dx.$$

Minthogy pedig $x \leqq -\frac{1}{2}$ esetén $x-\frac{1}{2} \leqq -1$, azért

$$\left|\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{n(x^3-x^2)}}{x+i\alpha}\,dx\right| < \frac{e^{-\frac{n}{4}}}{\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}}}\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} e^{n\left(x+\frac{1}{2}\right)}\,dx = \frac{e^{-\frac{n}{4}}}{\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}}}\int_{-\infty}^{0} e^{nu}\,du = O\left[\frac{e^{-\frac{n}{4}}}{n}\right].$$

A második integrál $\frac{1}{n}$ nagyságrendű. Ugyanis

$$\left|\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{h(x)\,e^{-nx^2}}{x+i\alpha}\,dx\right| \leqq \frac{2n}{\alpha}\int_{0}^{\frac{1}{2}} x^3\cdot e^{-n\frac{x^2}{1}}\,dx < \frac{2n}{\alpha}\int_{0}^{\infty} x^3\,e^{-n\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{4}{\alpha n},$$

hiszen

$$|h(x)| \leqq n|x|^3 \cdot e^{n|x|^3} \leqq n|x|^3 \cdot e^{\frac{1}{2}n|x|^3}, \quad \text{ha} \quad |x| \leqq \frac{1}{2}.$$

A harmadik viszont $n^{-\frac{3}{2}}$ nagyságrendű:

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\alpha^2} \frac{e^{-nx^2}}{x+i\alpha}\, dx\right| \leqq \frac{2}{\alpha^2}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cdot e^{-nx^2}\, dx < \frac{2}{\alpha^3}\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-nx^2}\, dx =$$

$$= \frac{2}{\alpha^3}\frac{1}{n^{3/2}}\int_0^{\infty} u^2 e^{-u^2}\, du = O(n^{-\frac{3}{2}}).$$

A negyedik hibatag ismét exponenciálisan kicsiny. Ezzel nem is foglalkozunk, mert becslése lényegében azonos az elsőével.

Végül tehát az

$$I_n = -\frac{2\sqrt{\pi}\,i}{\alpha\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

eredmény adódik, amit természetesen tovább lehet finomítani a fenti módon, ha $h(x)$, illetve $\frac{1}{x+i\alpha}$ további tagjait is figyelembe vesszük.

2. módszer

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-nx^2}}{x+i\alpha}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{x+i\alpha}\, dx + H_n,$$

ahol a H_n tagról már az imént láttuk, hogy exponenciálisan kicsi. A főtagban valós és képzetes részt szétválasztva, a valós rész integrálja zérust ad — páratlan függvényről lévén szó —, a képzetes részre vonatkozó integrálban pedig a $\gamma = \alpha^2 n$ helyettesítést bevezetve, a főrészre ez adódik:

$$-i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma t^2}}{1+t^2}\, dt; \quad \gamma = \alpha^2 \cdot n.$$

Mármost bevezetve az

$$I(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma t^2}}{1+t^2}\, dt$$

jelölést, az egyenletes konvergenciák konstatálása alapján a γ paraméter szerinti differenciálás felcserélhető az integrálással, amiből a

$$\frac{dI(\gamma}{d\gamma} = I(\gamma) - \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$$

reláció, ennek integrálása révén pedig (minthogy a határfeltétel)

$$I(\gamma) \to 0, \quad \text{ha} \quad 0 < \gamma \to \infty) \text{ az}$$

$$I(\gamma) = 2\sqrt{\pi}\, e^{\gamma} \int_{\sqrt{\gamma}}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

reláció adódik. Visszahelyettesítve az eredeti változókat, és figyelembe véve a hibatagokra az első módszer kapcsán adott becslést, az

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-n(z^3-z^2)}}{z + i\alpha}\, dz = -i\,2 \cdot \sqrt{\pi}\, e^{\alpha^2 n} \int_{\alpha\sqrt{n}}^{\infty} e^{-x^2}\, dx + O\left|\frac{1}{n}\right|$$

aszimptotikus becslés adódik.

4. Adjunk aszimptotikus becslést a

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^n\, dx$$

integrálra.

Útbaigazítás: Az $x = n\,y$, majd az $y = 1 + z$ változó-helyettesítés után a

$$\Gamma(n+1) = \frac{n^{n+1}}{e^n} \int_{-1}^{\infty} [(1+z)\, e^{-z}]^n\, dz$$

formula, azaz a

$$\Gamma(n+1) = \frac{n^{n+1}}{e^n} \int_{-1}^{\infty} [e^{-z + \ln(1+z)}]^n\, dz$$

formula adódik, amelyet az ismert módon kezelhetünk.

5. Adjunk aszimptotikus becslést az

$$I_n(\xi) = \int_{-\alpha+\varepsilon}^{-\alpha+\varepsilon} e^{nf(z)}\, dz$$

integrálra, ahol

$$f(z) = \operatorname{sh} z - \xi\, z,$$

$\xi > 1$ valós paraméter, α pedig egy pozitív gyöke az $f'(z) = 0$ egyenletnek, azaz $\operatorname{ch}\alpha = \xi$, végül ε kis pozitív szám, amelyre teljesül az

$$\varepsilon < 10^{-2} \cdot \operatorname{th}\alpha$$

egyenlőtlenség.

6. Adjunk aszimptotikus becslést a következő integrálokra:

a) $$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$

b) $$G(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-2t\sqrt{x}}}{\sqrt{t^6-1}}\,dt.$$

3. §. A GAMMA- ÉS A BÉTAFÜGGVÉNY

a) A gammafüggvényről

α) Származtatása A TAYLOR-sorok elméletében és gyakorlatában fontos számolás- és írástechnikai könnyítést jelentett —, de tulajdonképp az elemi kombinatorika kapcsán született meg — a faktoriális-fogalom, illetve jelölése. Függvénytani szempontból egy — első lépésben csak a nem-negatív egész számokra értelmezett — függvényről van szó, amelynek alapvető jellemzője, hogy rekurzív módon számítható az értéke, nevezetesen

$$0! = 1; \quad n! = n \cdot (n-1)!; \quad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots).$$

Rögtön bevezetünk egy másik — egyelőre kizárólag a pozitív egész számokra értelmezett — függvényt, az ún. gammafüggvényt (jele: Γ), amely az n természetes számhoz az $(n-1)!$ értéket rendeli. Definíciója, illetve a rá alapvetően jellemző rekurzív összefüggés tehát ilyen alakú:

$$\Gamma(1) = 1 = 0!; \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad (n = 2; 3; 4; \ldots)$$

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n). \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

A TAYLOR-sorok technikájában a Γ függvény természetesen a faktoriálissal egyenértékűen használható. Az e területen felmerülő problémák azonban kézenfekvővé tették, hogy a Γ függvény értelmezési tartományát célszerű lenne a lehető legbővebbre kiterjeszteni, elsősorban úgy, hogy a Γ függvényre jellemző rekurzív összefüggés általánosan érvényes maradjon, azaz az értelmezési tartomány minden z, illetve $(z+1)$ helyére érvényes legyen a

$$\Gamma(z+1) \equiv z\,\Gamma(z)$$

függvényegyenlet, másrészt úgy, hogy a függvény lehetőleg egyszerű struktúrájú legyen.

Mármost a $\Gamma(1) = 1$ feltétel és a definiáló függvényegyenlet mutatja, hogy a $z = 0$ helyen feltétlenül szingularitása kell hogy legyen a függvénynek, ebből viszont — ismét a függvényegyenlet alapján — következik, hogy ugyanez a helyzet minden negatív egész z-nél.

Ha tehát megköveteljük, hogy az értelmezési tartományban mindenütt teljesüljön a definíció alapjaként elfogadott függvényegyenlet (továbbá a $\Gamma(1) = 1$ „mellékfeltétel", *ami a függvényegyenlettel együtt már biztosítja, hogy a kapott függvény a csak egész értékekre értelmezettnek kiterjesztése*), akkor — a végtelen sok, szükségképp fellépő — szinguláris hely miatt a legegyszerűbb struktúra, amire számíthatunk: a függvény meromorf. A 2. § *d) β)* 9. feladatában igazoltuk, hogy — s ez a gammafüggvény

definíciója — létezik és egyértelműen meghatározott az a meromorf függvény, amely mindenütt kielégíti a

$$\Gamma(z+1) \equiv z\,\Gamma(z)$$

függvényegyenletet, továbbá a $\Gamma(1) = 1$ „mellékfeltételt".

β) Legfontosabb előállításai

Az imént említett feladatban konkréten meg is adtuk a Γ függvény — talán legfontosabb — előállítását egész függvények segítségével:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-Cz}}{z} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{z}{n}\right) \cdot e^{-\frac{z}{n}}},$$

ahol C az ún. EULER-állandó:

$$C = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right\} = 0{,}5772157\ldots$$

Ez a Γ-függvény ún. WEIERSTRASS-féle szorzatelőállítása.

A másik alapvetően fontos előállítás EULERtől származik. Az ún. EULER-féle másodfajú integrál azonban *közvetlenül csak* a $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkon állítja elő a Γ függvényt:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{z-1}\,dt \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Analitikusan folytatva ezt az integrált, megkapjuk a teljes értelmezési tartomány felett a Γ függvényt. Mint a 2. § *a) β)* 3. feladatban láttuk, az analitikus folytatás legegyszerűbb módja: az integrált szétválasztva a $[0, 1$ és az $[1, \infty$ szakaszokra vonatkozó integrálra, és előbbiben az e^{-t} tényezőt TAYLOR-sorba fejtve, az integrálás és összegezés sorrendjét felcseréljük (ez a $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkon az egyenletes konvergencia miatt megengedett). Így adódik a

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(z+k)} + \int_1^{\infty} e^{-t} \cdot t^{z-1}\,dt$$

kifejezés, amely az EULER-integrál analitikus folytatását adja az egész síkra.

Igen fontos még az EULER-féle szorzat:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{z} \left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} \right\},$$

az EULER—WEIERSTRASS-féle határérték:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}{z(z+1)\,(z+2)\ldots(z+n-1)}\, n^z,$$

és a HANKEL-féle *„kontúrintegrál"* alakú előállítás: $(z \neq 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i \sin \pi z} \oint_C (-w)^{z-1} \cdot e^{-w}\,dw,$$

ahol a C görbe a pozitív valós tengelye mentén felhasított w sík valós tengelyének felső partján a „végtelenből" az origóig jön, majd azt megkerülve, az alsó parton visszatér a „végtelenbe".

Ez utóbbi három előállítás z minden értékére definiálja a gammafüggvényt.

A feladatok között foglalkozunk azzal, hogy e formulák hogyan származtathatók egymásból.

γ) További előállítások

Számos további előállítás is megadható; ezek azonban kevésbé fontosak, nem érdemes megjegyezni, illetve kiemelni őket. A feladatok között szerepel majd néhány.

δ) Fontosabb összefüggések

A definícióban szereplő alapvető rekurzív összefüggésen kívül igen sok további függvényegyenlet is jellemző, illetve érvényes a Γ függvényre. Ezek közül itt csak a legfontosabbakat, a megjegyzésre leginkább méltókat emeljük ki; ezek és a további összefüggések bizonyítása azonban a példák között szerepel.

A legfontosabb a Γ függvény és a trigonometrikus függvények alábbi összefüggése:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) \equiv \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Nagyon lényeges a GAUSSTÓL és LEGENDRETŐL származó ún. szorzatösszefüggés

$$\Gamma(n\,z) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}(n-1)} \cdot n^{\left(nz-\frac{1}{2}\right)} \cdot \Gamma(z) \cdot \Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma \cdot \left(z+\frac{2}{n}\right) \ldots \Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right),$$

illetve ennek speciális — $n = 2$ választással adódó — esete:

$$\Gamma(2z) = \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{-(1-2z)}\, \Gamma(z) \cdot \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

ε) Számítástechnikai aszimptotikus kifejtések

Az alapvető rekurzív összefüggés alapján elegendő, ha a $0 \leqq \operatorname{Re} z < 1$ sávban ismerjük a Γ függvény értékeit, ebből már elemi műveletek segítségével számítani tudjuk a z sík bármely pontjában a függvényértéket. Sőt — a trigonometrikus függvényekkel fennálló kapcsolatot is tekintetbe véve —, elegendő a $0 \leqq \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$ sávban felvett függvényértékek ismerete.

A sávnak az origo kis környezetébe eső részén jól használhatjuk a — feladatok között szereplő — LAURENT-sorfejtést, $|z|$ nagy értékeinél a 2. § *e) β)*, illetve *γ)* rész feladatai között több módszerrel is felírt aszimptotikus kifejtést:

$$\ln \Gamma(z) \sim \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \sum_{r=1} \frac{(-1)^{r-1} B_r}{2r\,(2r-1)} \cdot \frac{1}{z^{2r-1}},$$

(ahol B_r az r-edik BERNOULLI-szám, és amely formula érvényes az $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ félsíkon), egyébként pedig — meglehetősen sok számítási nehézséggel — a különböző

előállítási módok valamelyikének felhasználásával tudjuk a függvény értékét megfelelő pontossággal számítani.

Legegyszerűbb természetesen — ha ilyen rendelkezésünkre áll — a táblázatok felhasználása.

μ) Alkalmazások | A Γ függvény néhány fontosabb alkalmazását is megemlítjük.

A) *A végtelen szorzatok egy osztályának számítása.*

Tegyük fel, hogy a

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

végtelen szorzat n-edik tényezője ilyen alakú:

$$u_n = A\,\frac{(n-a_1)\,(n-a_2)\ldots(n-a_k)}{(n-b_1)\,(n-b_2)\ldots(n-b_l)}.$$

A szorzat mármost csak akkor lehet konvergens, ha az u_n tényezők sorozata 1-hez konvergál. Ez az említett esetben annyit jelent, hogy a konvergencia szükséges feltételei — többek között — az $A = 1$ és a $k = l$ egyenlőségek. Ennek figyelembevétele után — n^k-val elosztva a számlálót és nevezőt — u_n ilyen alakú:

$$u_n = 1 - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k - b_1 - b_2 - \ldots - b_k}{n} + A_n,$$

ahol $A_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Mármost jól ismert, hogy a szorzat akkor és csakis akkor abszolút konvergens, ha tagjai abszolút konvergens sort adnak; ez akkor és csakis akkor következhet be, ha fennáll az

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k - (b_1 + b_2 + \ldots + b_k) = 0$$

egyenlőség.

Tegyük tehát fel, hogy eredetileg megadott sorunk abszolút konvergens. Ez esetben — mint azt a feladatok között igazolni fogjuk — fennáll a

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{b_1\,\Gamma(-b_1)\cdot b_2\,\Gamma(-b_2)\ldots b_k\,\Gamma(-b_k)}{a_1\,\Gamma(-a_1)\cdot a_2\,\Gamma(-a_2)\ldots a_k\,\Gamma(-a_k)}$$

egyenlőség.

B) *Bizonyos típusú paraméteres integrálok kiszámítása.*

Jó néhány típusú paraméteres integrál kifejezhető a Γ függvény segítségével Ezekkel a feladatok között foglalkozunk. Az egyik legfontosabb példát azonban kiemeljük:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{e}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\operatorname{tg}\Theta - z\,\Theta)\cdot\cos^{z-2}\Theta\,d\Theta.$$

b) A béta-függvényről

α) Definíciója Azt a kétváltozós $B(z, w)$ függvényt, amely mindenütt kielégíti az alábbi függvényegyenletet:

$$B(z, w) \equiv B(w, z)$$

(azaz változóiban szimmetrikus), és

$$B(z, w+1) \equiv \frac{w}{z+w} B(z, w)$$

továbbá amely mindkét változójának meromorf függvénye, végül kielégíti pl. a

$$B(1, 1) = 1$$

„kezdeti feltételt", nevezzük bétafüggvénynek.

β) Előállításai Legismertebb előállítása — a $\operatorname{Re} z > 0$; $\operatorname{Re} w > 0$ tartományban — az ún. első fajú EULER-integrál:

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} \, dt \qquad (\operatorname{Re} z > 0, \ \operatorname{Re} w > 0).$$

Ezt analitikusan folytatva, megkaphatjuk az egész (z, w) térben a bétafüggvényt.

Ennek kontúrintegrál-általánosítását adta meg POCHHAMMER, amely már az egész értelmezési tartományban előállítja a bétafüggvényt:

$$B(z, w) = -\frac{e^{-\pi i(z+w)}}{4 \sin(\pi z) \sin(\pi w)} \cdot \oint_C t^{z-1} (1-t)^{w-1} \, dt,$$

ahol a C zárt görbe a 0 és 1 pontot összekötő hasítékkal ellátott több levelű „t" síkon az origóból a felső parton az 1 pontba, ezt negatív értelemben megkerülve, az alsó parton vissza, majd az origót negatív értelemben megkerülve az alsó parton 1-be, azt ismét — de pozitív értelemben — megkerülve, a felső parton az origóba tér vissza, és végül, az origót pozitív értelemben megkerülve, záródik.

γ) Összefüggése a Γ függvénnyel Több függvényegyenlet köti össze egymással a béta- és gammafüggvényt, és teremt közöttük szoros kapcsolatot. Ezekre a feladatok között térünk ki, csak a legfontosabbat említjük itt:

$$B(z, w) \equiv \frac{\Gamma(z) \cdot \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

β) Alkalmazások Paraméteres integrálok számításánál és egyszerűsítésénél alkalmazzuk gyakran a bétafüggvényt is. Kiemeljük a következőt: a bétafüggvény felhasználásával az

$$\int_0^{1-y} \int_0^{1-x-y} f(t+x+y) \, t^{z-1} \cdot x^{w-1} \, dt \, dx$$

kettős integrál — ahol f folytonos függvény, $\operatorname{Re} z > 0$ és $\operatorname{Re} w > 0$ — a következő egyszeres integrálba transzformálható:

$$B(z, w) \int_0^{1-y} f(y+\tau) \, \tau^{z+w-1} \, d\tau.$$

c) Vegyes gyakorló feladatok

Példák és feladatok

a)

α) **1.** A függvényegyenletre támaszkodva, határozzuk meg a gammafüggvény LAURENT-sorfejtéseinek fő részét a pólushelyeken.

2. Legyen $x > 0$ és

$$P(x) = \int_0^1 e^{-t} \cdot t^{x-1}\, dt.$$

Határozzuk meg, hogy milyen függvényegyenletet elégít ki $P(x)$; adjuk meg $P(x)$ analitikus folytatásának (MITTAG—LEFFLER-féle) részlettörtes alakját is!

β—γ) **1.** Igazoljuk, hogy $\Gamma(z)$ előállítható az egész számsíkon az EULERtől származó

$$\Gamma(z) \equiv \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}}$$

alakban.

Útbaigazítás: Megkísérelhetnők igazolni, hogy a fentebb definiált függvény valóban kielégíti az egész számsíkon a Γ függvényre jellemző függvényegyenletet (hogy a $\Gamma(1) = 1$ relációt kielégíti, az közvetlenül leolvasható). Ez megy is, de alapos jártasságot igényel a végtelen szorzatok elméletében; azt kell ugyanis igazolnunk, hogy érvényes a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{z}{n}\right)}{1+\frac{z+1}{n}} \equiv z+1$$

azonosság.

Minthogy azonban a 2. § *a) β)* 3. és a 2. § *a) γ)* 3. feladatban igazoltuk, hogy az EULER-féle másodfajú integrál, ill. annak analitikus folytatása, a 2. § *d) β)* 9. feladatban pedig, hogy a WEIERSTRASS-féle szorzat-előállítással adott függvény valóban a Γ függvényt definiálja, támaszkodhatunk a függvényegyenleten kívül ezekre is a következőkben.

Mármost a fentebb megadott szorzatalak erősen emlékeztet a WEIERSTRASS-féle szorzat-előállításra, és abból kis ügyeskedéssel — éspedig első lépésben úgy, hogy abban az EULER-konstansot definíciója alapján ügyesen helyettesítjük ilyenformán:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\left[\lim_{m\to\infty} e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\ln m\right)z}\right]\left[\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \frac{1}{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}}\right],$$

— könnyen ki is hozható.

2. Igazoljuk, hogy a Γ függvény előállítható az EULER—WEIERSTRASS-féle határérték alakban:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\cdot n^z}{z(z+1)\dots(z+n-1)}.$$

Útbaigazítás: Az előző feladatban szereplő EULER-féle alakra támaszkodva, minimális ügyeskedéssel kihozható az itt szereplő EULER—WEIERSTRASS-féle alak.

Nem nehéz az EULER-féle másodfajú integrálra támaszkodva sem az EULER—WEIERSTRASS-féle alak felírása. Ugyanis könnyen igazolhatjuk, hogy a

$$\gamma(z;\ n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cdot t^{z-1}\,dt$$

függvény határértéke $n \to \infty$ esetén épp a Γ függvény, másrészt a $\tau = \frac{t}{n}$ új változó behozatala és ismételt parciális integrálás útján a $\gamma(z, n)$ függvény könnyen azonosítható az EULER—WEIERSTRASS-féle sorozat n-edik elemével.

3. Igazoljuk, hogy a Γ függvény a bevezetésben említett HANKEL-féle kontúrintegrál segítségével előállítható.

4. Igazoljuk, hogy az

$$\int_0^\infty t^{z-1}\left|e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2!} + - \dots + (-1)^{k-1}\frac{t^k}{k!}\right| dt$$

formula a $-k-1 < \operatorname{Re} z < -k$ sávon a $\Gamma(z)$ függvényt állítja elő.

5. Bizonyítsuk be, hogy a $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkon a Γ függvény előállítható az

$$\int_0^1 \left[\ln\frac{1}{x}\right]^{z-1} dx$$

alakban.

6. Bizonyítsuk be a — LAPLACE-transzformáció szempontjából nagyon fontos — alábbi formulát:

$$\Gamma(z) \equiv w^z \int_0^\infty e^{-wx}\cdot x^{z-1}\,dx,$$

amely a $\operatorname{Re} w > 0$; $\operatorname{Re} z > 0$ tartományban érvényes.

7. Igazoljuk, hogy a $\operatorname{Re} s > 0$; $\operatorname{Re} z > 1$ tartományban érvényes az

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \equiv \left[\int_0^\infty \frac{e^{-xs}\cdot x^{z-1}}{e^x - 1}\,dx\right]^{-1} \cdot \left\{\frac{1}{(s+1)^z} + \frac{1}{(s+2)^z} + \frac{1}{(s+3)^z} + \dots\right\}$$

formula.

Útbaigazítás: Az integrált átvíve a baloldalra, majd $\frac{1}{1-e^{-x}}$-et $\sum e^{-kx}$ alakú sorba rendezve, igazolva a sor egyenletes konvergenciáját az integrációs intervallumon, tagonként integrálva és végül felhasználva a 3. § *a) β)* 6. feladat eredményeit, adódik az állított reláció.

8. Igazoljuk az

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \equiv \frac{e}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\operatorname{tg}\Theta - z\Theta) \cdot \cos^{z-2}\Theta \, d\Theta$$

azonosságot (Re $z > 0$).

Megoldás: A 3. § *a) β)* 3. feladatban igazoltuk, hogy a

$$-\frac{1}{2i \sin \pi z} \oint_C (-t)^{z-1} \cdot e^{-t} \, dt$$

formula az egész z síkon előállítja a $\Gamma(z)$ függvényt, ha a görbe a pozitív valós tengelye mentén felhasított t sík valós tengelyének felső partján halad a $+\infty$-ből az origóba, majd azt megkerülve, az alsó parton visszatér.

Írjunk mármost a fenti formulában z helyébe $1-\zeta$-t. Így a

$$\Gamma(1-\zeta) = -\frac{1}{2i \sin \pi\zeta} \oint_C (-t)^{-\zeta} e^{-t} \, dt; \; [\sin(\pi - \pi\zeta) = \sin \pi\zeta]$$

formulát kapjuk. Felhasználva most még az igen fontos — és a 3. § *a) δ)* feladatai között a későbbiekben többször szereplő —

$$\Gamma(\zeta)\,\Gamma(1-\zeta) = \frac{\pi}{\sin \pi\zeta}$$

összefüggést, az önmagában is jelentős

$$\frac{1}{\Gamma(\zeta)} \equiv \frac{i}{2\pi} \oint_C (-t)^{-\zeta} e^{-t} \, dt$$

formulához jutunk.

Igazoljuk mármost, hogy a Re $\zeta > 0$ és a Re $a > 0$; Im $a = 0$ feltételek mellett az előző integrálformulában szereplő C görbe deformálható a $-a$ ponton átmenő, az imaginárius tengellyel párhuzamos egyenessé. Egészítsük ki ugyanis két „végtelen sugarú negyedkörívvel" a C görbét és az előbb említett egyenest „zárt görbévé". A zárt görbe nem tartalmazza az integrandus egyetlen, $t = 0$-ban levő szinguláris pontját, s így állításunk igaz, ha a két „körív" mentén vett integrál zérust ad. (Pontos megfogalmazásnál R sugarú körívekből, az egyenes $2R$ hosszúságú, a C görbe mindkét ágának pedig $R - a$ hosszúságú szakaszáról van szó, utána elvégezzük az $R \to \infty$ határátmenetet.)

Igazoljuk tehát, hogy

$$\lim_{R\to\infty}\int_{G_R}(-t)^{-\zeta}\cdot e^{-t}\,dt = 0$$

ahol G_R a $-a$ középpontú kör azon két ívének egyike, amelyek a $-a$-n átmenő, az imaginárius tengellyel paralel egyenes és a pozitív valós tengely alsó, resp. felső partja között húzódik.

Húzzuk a $-a$ pontból $\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{R^{1-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\zeta}}$, ill. $-\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{R^{1-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\zeta}}$ szög alatt

$(1 > \varepsilon > 0)$ egy-egy félsugarat. E félsugarak a kérdéses köríveket két részre vágják: G_R^*, ill. G_R^{**}-ra, ahol G_R^* jelöli a $-a$ ponton átmenő, imaginárius tengellyel párhuzamos egyenes és a félsugár közötti ívet. Mármost R elég nagy értékeinél a G_R^* jobboldali, azaz G_R^{**} baloldali végpontjának — amit jelöljünk τ-val — valós része $R^{+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\zeta}$ nagyságrendű:

$$\operatorname{Re}\tau = O\left(R^{+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\zeta}\right).$$

Minthogy $e^{-R^{\frac{1}{2}\operatorname{Re}\zeta}}$ gyorsabban tart zérushoz, mint R bármely hatványa, azért az könnyen belátható, hogy a G_R^{**}-ra vonatkozó integrál — éspedig $R^{1+|\zeta|}\,e^{-R^{\frac{1}{2}\operatorname{Re}\zeta}}$ rendben — 0-hoz tart. E szakaszon ugyanis az

$$|e^{-t}| = e^{-\operatorname{Re}t};\quad |(-t)^{-\zeta}| < |t|^{|\zeta|}$$

becsléssel élhetünk. A G_R^* szakaszon viszont így becsülhetjük az integrált: e szakaszon

$$|e^{-t}| = e^{-\operatorname{Re}t} < e^{a}$$

$$|(-t)^{-\zeta}| = |e^{-\zeta\cdot\ln(-t)}| = e^{\operatorname{Re}[-\zeta\cdot\ln(-t)]} = e^{-\operatorname{Re}\zeta\cdot\ln|t| - \operatorname{Im}(-\zeta)\arg(-t)}$$

$$= e^{-\operatorname{Re}\zeta\cdot\ln|t|}\cdot e^{-\operatorname{Im}(-\zeta)\arg(-t)} \leqq \alpha\,|t|^{-\operatorname{Re}\zeta}$$

ahol α a felső G_R^* ív esetén $\max\left\{e^{-\frac{\pi}{2}\operatorname{Im}(\zeta)};\ e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{R^{1-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\zeta}}\right)\operatorname{Im}(\zeta)}\right\}$-val, az alsó G_R^* ív esetén pedig $\max\left\{e^{\frac{\pi}{2}\operatorname{Im}(\zeta)};\ e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{R^{1-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\zeta}}\operatorname{Im}(\zeta)\right)}\right\}$-val vehető egyenlőnek, azaz α-ra R elég nagy értékeinél R-től független korlát adható meg. Minthogy pedig az integrációs út hossza G_R^*-on $R\cdot\varepsilon\cdot R^{-\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\zeta\right)} = \varepsilon R^{\frac{1}{2}\operatorname{Re}\zeta}$ nagyságú, azért

$$\left|\int_{G_R^*}(-t)^{-\zeta}\cdot e^{-t}\,dt\right| < \alpha R^{-\operatorname{Re}(\zeta)}\cdot\varepsilon R^{\frac{1}{2}\operatorname{Re}\zeta}\cdot e^{a} = \alpha\,\varepsilon\,e^{a}R^{-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\zeta},$$

tehát a G_R^*-okra és így a G_R-re vonatkozó integrálok is 0-hoz tartanak, ha $R\to\infty$.

Ezt felhasználva, írhatjuk, hogy

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{i}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-a-iR}^{-a+iR} (-t)^{-z} e^{-t}\, dt. \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0)$$

Végezzük itt el a $t = -a - iu$ helyettesítést. Így az

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{a+iu} \cdot (a + iu)^{-z}\, du \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0)$$

formula adódik.

Ha itt még az $a = 1$ és $u = \mathrm{tg}\, \Theta$ helyettesítést is végrehajtjuk, végül is a bizonyítandó

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{e}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\mathrm{tg}\, \Theta - z\, \Theta) \cdot \cos^{z-2} \Theta\, d\Theta \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0)$$

formulát kapjuk.

9. Igazoljuk, hogy az $a > 0$ feltétel mellett érvényes a

$$\Gamma(z) = \frac{2\, a^z\, e^a}{\sin \pi z} \int_0^{\infty} e^{-at^2} (1 + t^2)^{z-\frac{1}{2}} \cdot \cos\{2\, at + (2\, z - 1)\, \mathrm{arctg}\, t\}\, dt$$

formula.

Útbaigazítás: Induljunk ki a Γ függvény HANKEL-féle kontúrintegrál alakjából, a C görbét deformáljuk olyan parabolává, amelynek fókusza az origóban van, tengelye pedig a valós tengely; ezután valós paramétert vezethetünk be.

10. x mely értékeire konvergál a

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot \sin t\, dt$$

integrál? Fejezzük ki az integrál értékét a Γ függvény segítségével, majd igazoljuk, hogy az integrál megegyezik a konvergenciatartományban az

$$e^{-Cx}\, \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{2n}\right) \cdot e^{\frac{x}{2n}}}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{2n-1}\right) e^{-\frac{x}{2n-1}}} \qquad (C \text{ az Euler-állandó})$$

meromorf függvénnyel.

11. Igazoljuk, hogy az

$$\int_0^\infty (\ln t)^m \frac{\sin t}{t}\, dt$$

integrál $m > 0$ esetben konvergens és határozzuk meg $m = 1$, illetve $m = 2$ esetben az értékét.

Útbaigazítás: Támaszkodhatunk — megfelelő változó-transzformáció után — a megelőző feladat eredményeire.

12. Legyen $\lambda > 0$; $x > 0$ és $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Igazoljuk, hogy érvényesek az alábbi relációk:

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-\lambda t \cos\alpha} \cos(\lambda t \sin\alpha)\, dt \equiv \lambda^{-x} \cdot \Gamma(x) \cdot \cos \alpha x,$$

illetve

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-\lambda t \cos\alpha} \cdot \sin(\lambda t \sin\alpha)\, dt \equiv \lambda^{-x} \cdot \Gamma(x) \sin \alpha x.$$

13. Igazoljuk, hogy $\Gamma(z)$ az alábbi integrál segítségével is előállítható:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2 \sin \pi z} \int_0^\infty e^{-x^2} x^{z-1} (1 + x^2)^{\frac{z}{2}} \{3 \sin(x - z \operatorname{arcctg} x) +$$

$$+ \sin[x - (2 - z) \operatorname{arcctg} x]\}\, dx.$$

14. Bizonyítsuk be, hogy a $0 < \operatorname{Re} z < 1$ sávban a gammafüggvény az alábbi (integrál) formulákkal is előállítható:

a) $e^{-\frac{i\pi}{2} z} \int_0^\infty e^{it} \cdot t^{z-1}\, dt$;

b) $e^{i\frac{\pi}{2} z} \int_0^\infty e^{-it} \cdot t^{z-1}\, dt$;

c) $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2} z} \int_0^\infty \cos t \cdot t^{z-1}\, dt$;

d) $\pi \left\{2 \cos\frac{\pi}{2} z \int_0^\infty \frac{\cos t}{t^z}\, dt\right\}^{-1}$.

15. Igazoljuk, hogy a $-1 < \operatorname{Re} z < 1$ sávban érvényes a

$$\Gamma(z) \cdot \sin\frac{\pi}{2} z \equiv \int_0^\infty t^{z-1} \sin t\, dt$$

azonosság.

16. Legyen $\operatorname{Re} z > 0$. Fejezzük ki a Γ függvény segítségével az alábbi paraméteres integrálokat:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} e^{zv} \cdot e^{-e^v}\, dv; \qquad b) \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt;$$

δ) Igazoljuk, hogy érvényes a

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(-z) \equiv -\frac{\pi}{z \sin \pi z}$$

azonosság, és ennek alapján vezessük le a bevezetésben említett

$$\Gamma(z)\, \Gamma(1-z) \equiv \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

azonosságot is.

Útbaigazítás: A gammafüggvény bármelyik előállításából kiindulva — kivéve természetesen a másodfajú EULER-integrált, mert az vagy csak $\Gamma(z)$-re, vagy csak $\Gamma(-z)$-re értelmezett —, aránylag egyszerű műveletekkel, illetve átalakításokkal megkaphatjuk az azonosságot. Ha a szorzat típusú definíciókból indulunk ki, a

$$-\frac{\pi}{z \cdot \sin \pi z}$$

meromorf függvény egész függvényekkel történő előállítására kell jutnunk, azaz a számlálóban π, a nevezőben pedig $z \sin \pi z$ WEIERSTRASS-féle szorzat-előállítását kell végül megkapnunk.

Felhasználva mármost a Γ függvény definíciójában szereplő függvényegyenletet, amely szerint

$$\Gamma(1-z) \equiv -z \cdot \Gamma(-z),$$

az első azonosságból közvetlenül eljutunk a másodikra.

2. Bizonyítsuk be a

$$\prod_{r=1}^{n-1} \left\{ \Gamma\left(\frac{r}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-r}{n}\right) \right\} = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}$$

relációt.

Útbaigazítás: A $\Gamma(z)\, \Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ relációt kell $(n-1)$-szer felhasználnunk. Ezután már csak azt kell belátnunk, hogy érvényes a

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin k\frac{\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

egyenlőség. Ez azonban a tényezők ügyes csoportosításával és a trigonometrikus függvények elemi szorzat-összefüggéseinek felhasználásával könnyen adódik.

3. Igazoljuk, hogy a Γ függvény első, illetve második logaritmikus deriváltja előállítható a következő alakban:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) \equiv -C - \frac{1}{z} + z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(z+n)},$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^2},$$

ahol C az ún. EULER-állandó.

4. Igazoljuk, hogy a $\operatorname{Re} z > 0$ esetben $\Gamma(z)$ logaritmikus deriváltja az alábbi integrállal állítható elő:

$$\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right)dt.$$

Megoldás: Ha $\Gamma(z)$ másodfajú EULER-integrállal történő előállításából indulunk ki, minimális ügyeskedéssel kihozhatjuk a fenti formulát, felhasználva, hogy $\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$. Induljunk most ki pl. $\Gamma(z)$ WEIERSTRASS-féle szorzat-előállításából. A logaritmikus derivált ez esetben — a 2. § *b)* 3. feladat szerint — a tényezők logaritmikus deriváltjainak összege minden olyan tartományban, amely nem tartalmazza a $z = -k$ (k természetes egész vagy 0) pontok egyikét sem, itt tehát

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -C - \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{z+m}\right),$$

amit, hogy integrálok összegévé alakíthassunk, célszerűen a

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -C - \frac{1}{z} + \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{z+m}\right)$$

alakba írunk. Mármost a $\operatorname{Re} z > 0$ esetben

$$\frac{1}{z+m} = \int_0^{\infty} e^{-t(z+m)}\,dt \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

és speciálisan

$$\frac{1}{m} = \int_0^{\infty} e^{-tm}\,dt \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Így $$-\frac{1}{z}+\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{z+m}\right)=-\int_0^\infty e^{-zt}\,dt+\sum_{m=1}^{n}\left\{\int_0^\infty e^{-mt}\,dt-\int_0^\infty e^{-t(z+m)}\,dt\right\}$$

$$=-\int_0^\infty e^{-zt}\,dt+\int_0^\infty\left[\sum_{m=1}^{n}\left\{e^{-mt}-e^{-t(z+m)}\right\}\right]dt=$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{1-e^{-t}}\left\{e^{-t}-e^{-zt}+e^{-(z+n+1)t}-e^{-(n+1)t}\right\}dt,$$

felhasználva, hogy geometriai sorösszegek számításáról van szó. Ezután meg kell kísérelnünk C-t — azaz az EULER-állandót — is hasonló alakú integrállal előállítani. Ez a következőképp történhet:

$$C=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right\}.$$

Mármost teljes indukcióval könnyen igazolható az

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1-(1-t)^n}{t}\,dt$$

képlet helyessége. Hiszen a képlet $n=1$ esetén nyilván helyes, emellett

$$\int_0^1\frac{1-(1-t)^{n+1}}{t}\,dt-\int_0^1\frac{1-(1-t)^n}{t}\,dt=\int_0^1(1-t)^n\frac{[-(1-t)+1]}{t}\,dt=\int_0^1 u^n\,du=$$

$$=\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

amivel állításunkat igazoltuk. Így

$$C=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1\frac{1-(1-\tau)^n}{\tau}\,d\tau-\int_1^n\frac{dt}{t}\right\}.$$

A következő lépésben úgy alakítjuk át ezt az integrálkifejezést, hogy a határátmenetet mindkét újonnan fellépő integrálban el lehessen végezni; e célból az első integrálban elvégezzük a $\tau=\frac{t}{n}$ változó-helyettesítést. Az új integrációs határok így: 0 és n.

A következő lépés: az $[1, n]$ szakaszra vonatkozó integrált leválasztjuk, és a második integrálhoz csatoljuk:

$$C = \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}\,dt + \int_1^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \frac{dt}{t} \right\}.$$

Minthogy pedig érvényes a

$$0 \leqq e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqq \frac{t^2 \cdot e^{-t}}{n} \qquad (0 \leqq t < n)$$

becslés*, azért $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$-t mindkét integrálban e^{-t}-vel helyettesítve, az elsőben a hiba

$$\frac{1}{n}\int_0^1 t \cdot e^{-t}\,dt = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

a másodikban pedig ugyancsak

$$\frac{1}{n}\int_1^n t \cdot e^{-t}\,dt = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

nagyságú, és így végül is a

$$C = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt - \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

* Ez így látható be:

$$1 + y \leqq e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots \leqq \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \ldots \qquad (0 \leqq y < 1$$

$$1 + y \leqq e^y \leqq \frac{1}{1-y} \quad (0 \leqq y < 1)$$

azaz $\left(y = \frac{t}{n}\right)$

$$1 + \frac{t}{n} \leqq e^{\frac{t}{n}} \leqq \left(1-\frac{t}{n}\right)^{-1}; \quad \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leqq e^t \leqq \left(1-\frac{t}{n}\right)^{-n} \qquad (0 \leqq t < n)$$

Reciprokokat véve tehát

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \geqq e^{-t} \geqq \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \qquad (0 \leqq t < n$$

azaz egyrészt:

$$0 \leqq e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left\{1 - e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\},$$

másrészt $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leqq e^t$. Ezt az utóbbi egyenlőtlenségbe helyettesítjük:

$$0 \leqq e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqq e^{-t}\left\{1 - \left(1+\frac{t}{n}\right)^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\} = e^{-t}\left\{1 - \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right\} \leqq \frac{e^{-t}\cdot t^2}{n}$$

a BERNOULLI-egyenlőtlenség felhasználásával), amiből a becslés már könnyen leolvasható.

reláció adódik. Tovább alakítva:

$$C = \lim_{\delta \to 0} \left\{ \int_{\delta}^{1} \frac{1}{t}\, dt - \left[\int_{\delta}^{1} + \int_{1}^{\infty} \right] \frac{e^{-t}}{t}\, dt \right\};$$

minthogy pedig a

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{1-e^{-\delta}}^{\delta} \frac{dt}{t} = \lim_{\delta \to 0} \ln \frac{\delta}{1 - e^{-\delta}} = \ln \left(\lim_{\delta \to 0} \frac{\delta}{1 - e^{-\delta}} \right) = \ln 1 = 0$$

reláció érvényes, azért egyszersmind

$$C = \lim_{\delta \to 0} \left\{ \int_{1-e^{-\delta}}^{1} \frac{d\tau}{\tau} - \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \right\}.$$

Mármost az első integrálban elvégezve a $\tau = 1 - e^{-t}$ helyettesítést, végül is a kívánt alakú

$$C = \lim_{\delta \to 0} \left\{ \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}\, dt - \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \right\} = \int_{0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right\} e^{-t}\, dt$$

reláció adódik. Ezt is helyettesítve a $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ legutóbb felírt alakjába, a következő formulát nyerjük — szétválasztva azon tagok integrálját, amelyek nem, illetve amelyek függenek n-től:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\int_{0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right\} e^{-t}\, dt + \lim_{n \to \infty} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-zt} - e^{-(n+1)t} + e^{-(z+n+1)t}}{1 - e^{-t}}\, dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right) dt - \lim_{n \to \infty} \int_{0}^{\infty} \frac{1 - e^{-zt}}{1 - e^{-t}}\, e^{-(n+1)t}\, dt.$$

Minthogy pedig $\operatorname{Re} z > 0$ esetben a $0 \leqq t$ (végtelen) intervallumon érvényes az

$$\left| \frac{1 - e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right| \leqq K$$

becslés, azért a második tag határértéke 0, és így igazoltuk a kívánt előállítást.

5. Bizonyítsuk be, hogy a $\Gamma(z)$ függvény logaritmikus deriváltja előállítható az

a) $$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_{0}^{\infty} \left\{ e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^z} \right\} \frac{dx}{x}$$

illetve a

$$b)\quad \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = -\int_0^\infty \left\{\frac{1}{\ln t} + \frac{t^{z-1}}{1-t}\right\} dt$$

alakban, ha $\operatorname{Re} z > 0$.

6. Igazoljuk, hogy $0 < x < 1$ esetén érvényes a

$$2\ln\Gamma(x) - \ln\pi + \ln\sin\pi x \equiv \int_0^\infty \left\{\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}-x\right)t}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}t} - (1-2x)\,e^{-t}\right\}\frac{dt}{t}$$

azonosság.

7. Fejtsük FOURIER-sorba a $0 < x < 1$ szakaszon az

$$\ln\Gamma(x) - \frac{1}{2}\ln\sin\pi x$$

függvényt.

Útbaigazítás: Támaszkodjunk a 3. § *a) δ)* 6. feladatban szereplő integrál-előállításra; az integráljel alatt szereplő függvények FOURIER-sorfejtését elvégezve, könnyen belátható, hogy az integrálás és összegezés sorrendje felcserélhető. A fellépő

$$\int_0^\infty \left\{\frac{2n\pi}{t^2+4n^2\pi^2} - \frac{e^{-t}}{2n\pi}\right\}\frac{dt}{t}$$

típusú integrálokat a 3. § *a) δ)* 4. feladatban C-re megadott integrálalak segítségével könnyen számíthatjuk. Így adódik az

$$\frac{1}{2}\ln\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}[C + \ln 2\pi + \ln n]\sin 2n\pi x$$

alakú FOURIER-sorfejtés.

8. Igazoljuk, hogy $\Gamma(z)$ logaritmikus deriváltja az alábbi integrál alakkal is megadható:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{2z} + \ln z - 2\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(z^2+t^2)\,(e^{2\pi t}-1)}.$$

Útbaigazítás: Kiindulva a jól ismert:

$$\frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}$$

részlettörtes előállításból, az összeg tagjait könnyen helyettesíthetjük olyan improprius integrálokkal, hogy — az összegezés és integrálás sorrendjét felcserélve — az integráljel alatt el tudjuk végezni a szummációt; a kapott formulát integrálva (a paraméter szerint), a kívánt eredményt kapjuk.

9. Igazoljuk, hogy $\ln \Gamma(z)$ az alábbi alakban is előállítható:

$$\ln \Gamma(z) \equiv \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \frac{t}{z}}{e^{2\pi t} - 1}\, dt.$$

Útbaigazítás: A 3. § *a) δ* 8. feladatban szereplő formula integrálása vezet célhoz.

10. Igazoljuk, hogy $\ln \Gamma(z)$ előállítható az alábbi alakban:

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{k-1}{k \cdot (k+1)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(z+r)^k} \right\}.$$

11. Igazoljuk, hogy a $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkon érvényes a

$$\frac{d^2}{dz^2} \ln \Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{x \cdot e^{-xz}}{1 - e^{-x}}\, dx$$

előállítás.

12. Legyen

$$w(z) = \int_z^{z+1} \ln \Gamma(t)\, dt.$$

Igazoljuk, hogy

$$w = z \ln z - z + \ln \sqrt{2\pi}$$

azaz, hogy

$$\frac{dw}{dz} = \ln z.$$

13. Igazoljuk, hogy $\Gamma(z)$ logaritmikus deriváltja (amelyet gyakran $\psi(z)$-vel jelölnek) kielégíti a

$$\psi(-1 - z) \equiv \psi(z) + \pi \operatorname{ctg} \pi z$$

függvényegyenletet.

14. Bizonyítsuk be, hogy a Γ függvény kielégíti a következő függvényegyenletet:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right)} \Gamma^2(-z) \equiv \frac{\Gamma^2(1 + 2z)}{\Gamma^4(1 + z)} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 \frac{\cos \pi z}{2^{4z}}.$$

15. Legyen $\operatorname{Re} z > 0$. Igazoljuk, hogy a $\Gamma(z)$ függvény ez esetben kielégíti a

$$\sum_{r=0}^{n-1} \frac{\Gamma(r - z)}{\Gamma(r + 1)} \equiv - \frac{\Gamma(n - z)}{z \cdot \Gamma(n)}$$

azonosságot.

16. Legyen $\operatorname{Re} z > -1$. Igazoljuk, hogy ez esetben

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -C + \int_0^1 \frac{1-t^z}{1-t}\,dt.$$

Útbaigazítás: $\frac{1}{1-t}$ TAYLOR-sorba fejtése és tagonkénti integrálás közvetlenül adják a kívánt eredményt.

ε)

1. Határozzuk meg az

$$\ln \Gamma(1+z)$$

függvény MACLAURIN sorát.

Megoldás: a 3. § *a) δ)* 3., illetve 4. feladat eredményeiből azonnal következik, hogy

$$\lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \ln \Gamma(1+z) = \lim_{x\to 1} \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = -C$$

ahol C az ún. EULER-féle szám.

Ismeretes továbbá, hogy

$$\frac{d^2}{dz^2} \ln \Gamma(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2},$$

amiből

$$\frac{d^2}{dz^2} \ln \Gamma(1+z)\Big|_{z=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Az előzőkből közvetlenül leolvasható, hogy

$$\frac{d^n}{dz^n} \ln \Gamma(1+z) = (-1)^n \Gamma(n) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^n} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

azaz

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \ln \Gamma(1+z)\Big|_{z=0} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}.$$

Végül $\Gamma(1) = 1$, és így $\ln \Gamma(1) = 0$.

Tehát

$$\ln \Gamma(1+z) = -Cz + \sum_{\nu=2}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^\nu}{\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\nu} z^\nu \right\},$$

és a hatványsor konvergenciasugara — függvénytani meggondolások alapján, de pl. az együtthatók becsléséből is könnyen adódóan — egységnyi.

Megjegyezzük még, hogy a $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k^{2\nu}}$ típusú sorok a BERNOULLI-számok segítségével zárt alakban is kifejezhetők, így pl.

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. Ábrázoljuk a

$$\Gamma(x), \quad \text{illetve az} \quad \ln \Gamma(x)$$

függvényt (x valós szám).

3. Igazoljuk, hogy a $z = i\,x$ esetben (x valós szám) érvényes az alábbi egyenlőség:

$$|\,\Gamma(z)\,| = |\,\Gamma(i\,x)\,| = \sqrt{\frac{\pi}{x \operatorname{sh} \pi\, x}}\,.$$

4. Igazoljuk, hogy a $-\frac{\pi}{2} < \arc z < \frac{\pi}{2}$ félsíkon érvényesek az alábbi határérték-relációk:

a) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\Gamma(z+\alpha)}{z^{\alpha}\,\Gamma(z)} = 1.$

b) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\Gamma(\alpha+z)\,\Gamma(\beta+z)}{\Gamma(\gamma+z)\,\Gamma(1+z)} \cdot z^{-\alpha-\beta+\gamma+1} = 1.$

5. Számítsuk ki az

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-a-i\infty}^{-a+i\infty} \Gamma(-z) \cdot \zeta^{z}\, dz$$

integrál értékét a $-\frac{\pi}{2} < \arc \zeta < \frac{\pi}{2}$ félsíkon, ha $a > 0$.

Útbaigazítás: Éppúgy, mint a 3. § *a) β)* 8. feladatban, a „végtelen egyenest" egy „végtelen sugarú félkörrel" ki kell egészíteni zárt görbévé. Ekkor a reziduum-tétel alkalmazható; e célból az integrandust a trigonometrikus összefüggés segítségével érdemes átalakítani:

$$\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{\Gamma(1+z)\sin \pi z}$$

A reziduumok figyelembevétele azonnal kiadja azt az eredményt, hogy a zárt görbén vett integrál értéke

$$e^{-\zeta}$$

-val egyenlő. Igazolnunk kell még, hogy a növekvő sugarú körív mentén vett integrál zérushoz tart. Ehhez fel kell használnunk a $\Gamma(z)$-re adott aszimptotikus becslést.

6. Legyen $s < 1$. Határozzuk meg a $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ félsíkon az

$$F_s(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-zt} \cdot t^{-s}}{1+t}\, dt$$

függvény aszimptotikus sorát.

μ 1. Tekintsük a $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ végtelen szorzatot, ahol

$$u_n = \frac{(n-a_1)(n-a_2)\dots(n-a_k)}{(n-b_1)(n-b_2)\dots(n-b_k)}$$

és $$a_1 + a_2 + \dots + a_k - b_1 - b_2 - \dots - b_k = 0.$$

Igazoljuk, hogy e szorzat abszolút konvergens, továbbá, hogy a szorzat értéke

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{\prod_{s=1}^{k} [b_s\,\Gamma(-b_s)]}{\prod_{s=1}^{k} [a_s\,\Gamma(-a_s)]} = \prod_{s=1}^{k} \frac{b_s\,\Gamma(-b_s)}{a_s\,\Gamma(-a_s)} = \prod_{s=1}^{k} \frac{\Gamma(1-b_s)}{\Gamma(1-a_s)}.$$

Útbaigazítás: A bevezetésben vázoltuk, hogy hogyan igazolható a szorzat abszolút konvergens volta. Ami viszont a szorzat értékének kiszámítását illeti, a megadott végeredmény és az a természetes és szokásos eljárás, hogy u_n számlálóját és nevezőjét n^k-val történő osztás után ilyen alakba írjuk:

$$u_n = \frac{\left(1-\frac{a_1}{n}\right)\left(1-\frac{a_2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{a_k}{n}\right)}{\left(1-\frac{b_1}{n}\right)\left(1-\frac{b_2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{b_k}{n}\right)},$$

azonnal indukálja az alapötletet. Szorozzuk meg — a faktorok megfelelő szétválasztását és csoportosítását már az olvasóra bízzuk — a szorzat n-edik tényezőjét, u_n-t

$$e^{\frac{1}{n}(a_1+a_2+\dots+a_k-b_1-b_2-\dots-b_k)} = e^0 = 1$$

-gyel. Így már felhasználhatjuk a Γ függvényt WEIERSTRASS-féle szorzat-előállításából következő

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{+\frac{z}{n}} = \frac{1}{-z\,\Gamma(-z)\,e^{-cz}}$$

relációt.

2. Határozzuk meg a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(a+b+n)}{(a+n)(b+n)}$$

szorzat értékét.

3. Határozzuk meg az

$$x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n^k}\right)$$

végtelen szorzat értékét, ahol k egynél nagyobb természetes szám.

Megoldás: Egy kis ügyeskedéssel arra az alakra hozhatjuk az itt megadott szorzat általános tényezőjét, mint amilyen a 3. § a) μ) 1. feladatban szerepel. Jelöljük ugyanis $x^{\frac{1}{k}}$-val az x (általában komplex) szám valamelyik k-adik gyökét, α-val pedig az

$$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{k}}$$

egységgyököt. Ekkor az $y^k - x = 0$ azaz az $y - \sqrt[k]{x} = 0$ egyenlet összes megoldásai a következők:

$$y_0 = x^{\frac{1}{k}}; \quad y_1 = \alpha\, x^{\frac{1}{k}}; \quad y_2 = \alpha^2 x^{\frac{1}{k}}; \quad \ldots; \quad y_{k-1} = \alpha^{k-1} x^{\frac{1}{k}},$$

továbbá ismert módon

$$\sum_{s=0}^{k-1} y_s = x^{\frac{1}{k}} (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{k-1}) = x^{\frac{1}{k}} \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha} = 0,$$

hiszen $\alpha^k = 2\pi i = 1$. Az $f(y) = y^k - x$ polinom gyöktényezős alakját az $y = n$ helyen felírva szorzatunk általános tagja:

$$u_n = 1 - \frac{x}{n^k} = \frac{n^k - x}{n^k} = \frac{(n - x^{\frac{1}{k}})(n - \alpha x^{\frac{1}{k}})(n - \alpha^2 x^{\frac{1}{k}}) \ldots (n - \alpha^{k-1} x^{\frac{1}{k}})}{(n-0)(n-0)(n-0)\ldots(n-0)},$$

amiből leolvasható, hogy az 1. példában szereplő

$$\sum a_k - \sum b_k = 0$$

feltétel is teljesül. Ezért

$$x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x \cdot n^{-k}) = \frac{-x}{x \cdot \Gamma(-x^{\frac{1}{k}})\, \Gamma(-\alpha x^{\frac{1}{k}}) \ldots \Gamma(-\alpha^{k-1} x^{\frac{1}{k}})} = \prod_{s=0}^{k-1} \frac{-1}{\Gamma(\alpha^s x^{\frac{1}{k}})}.$$

4. Határozzuk meg az

$$(1 - z)\left(1 + \frac{z}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{3}\right) \ldots \left(1 - \frac{(-1)^n z}{n}\right) \ldots$$

szorzat értékét.

5. Legyenek α és β valós számok. Határozzuk meg a

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{\beta^2}{(\alpha + n)^2}\right]$$

szorzat értékét.

6. Határozzuk meg a $\operatorname{Re} z > 0$ feltétel mellett az

$$\int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-zt} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} + (z - 1)\, e^{-t} \right\} \frac{dt}{t}$$

integrál értékét.

Megoldás: a 3. § *a) γ)* 4. feladatban megadtuk $\Gamma(z)$ logaritmikus deriváltjának egy integrál-előállítását, amely emlékeztet az itt található integrálra. Ott a következő eredményt kaptuk:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \psi(z) = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right\} dt \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0).$$

Differenciáljuk formálisan a megadott integrált z szerint az integráljel alatt:

$$\int_0^\infty \frac{d}{dz} \left\{ \frac{e^{-zt} - e^{-t}}{1-e^{-t}} + (z-1)\, e^{-t} \right\} \frac{dt}{t} =$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-t}}{t} - t\, \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \cdot \frac{1}{t} \right\} dt = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right\} dt,$$

azaz épp az imént $\psi(z)$-re megadott integrálra jutottunk. $F(z)$-vel jelölve tehát az adott integrált, azt kell csak igazolnunk, hogy a $\mathrm{Re}\, z > 0$ félsíkon $F(z)$ reguláris függvény, és deriváltja úgy számítható, hogy a differenciálás és az integrálás művelete sorrendre felcserélhető. Ha ti. ez igaz, akkor fenti reláció szerint

$$\frac{d}{dz} F(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z), \quad \text{azaz} \quad F(z) = \ln \Gamma(z) + K$$

Mármost F integrandusa:

$$\left\{ \frac{e^{-zt} - e^{-t}}{1-e^{-t}} + (z-1) \cdot e^{-t} \right\} \frac{1}{t}$$

mindkét változójának folytonos függvénye a $0 \leqq t$; $\mathrm{Re}\, z > 0$ tartományban, továbbá bármely rögzített $0 \leqq t$ mellett reguláris függvénye z-nek a $\mathrm{Re}\, z > 0$ tartományban; emellett az

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-zt} - e^{-t}}{1-e^{-t}} + (z-1)\, e^{-t} \right\} \frac{dt}{t}$$

integrál egyenletesen konvergál a $\mathrm{Re}\, z \geqq \alpha > 0$ félsík ($\alpha > 0$ tetszőleges) és a $|z| \leqq G < \infty$ kör közös részén. Az első két állítás triviális, a harmadik is egyszerűen látható be: bármely $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan $A(\varepsilon)$, hogy az

$$\left| \int_A^\infty \left\{ \frac{e^{-zt} - e^{-t}}{1-e^{-t}} + (z-1)\, e^{-t} \right\} \frac{dt}{t} \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesüljön, éspedig z-től függetlenül. Ugyanis

$$|e^{-zt} - e^{-t}| = e^{-t} |e^{-(z-1)t} - 1| \leqq e^{-t} [|e^{-(z-1)t}| + 1] =$$

$$= e^{-t} [e^{[1-\mathrm{Re}(z)]t} + 1] \leqq e^{-t} [e^{(1-\alpha)t} + 1] = e^{-\alpha t} + e^{-t},$$

azaz

$$\left|\frac{e^{-zt}-e^{-t}}{1-e^{-t}}\right| \leqq 2(e^{-\alpha t}+e^{-t}), \quad \text{ha} \quad t \geqq 1; \qquad \operatorname{Re} z \geqq \alpha > 0;$$

emellett

$$|(z-1)\,e^{-t}| = |z-1|\cdot e^{-t} \leqq (G+1)\cdot e^{-t}, \qquad (|z| \leqq G)$$

azaz

$$\left|\int_A^\infty \left\{\frac{e^{-zt}-e^{-t}}{1-e^{-t}} + (z-1)\,e^{-t}\right\}\frac{dt}{t}\right| \leqq 2\int_A^\infty \left\{\frac{(G+2)\,e^{-t}}{t} + \frac{e^{-\alpha t}}{t}\right\} dt$$

amiből azonnal leolvasható, hogy $A(\varepsilon)$ — rögzített $\alpha > 0$ és G mellett valóban csak ε-tól függ.

Következésképp $F(z)$ reguláris függvény a $\operatorname{Re} z \geqq \alpha > 0$ félsík és a $|z| \leqq G$ kör közös része által meghatározott zárt tartományban, és itt deriváltját úgy képezhetjük, hogy az integrandus deriváltjának vesszük az (improprius) integrálját*. Minthogy pedig ez bármely ilyen típusú zárt tartományra igaz, azért igaz az egész $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkon is. Azaz

$$F(z) = \int_0^\infty \left\{\frac{e^{-zt}-e^{-t}}{1-e^{-t}} + (z-1)\,e^{-t}\right\}\frac{dt}{t} = \ln \Gamma(z) + K.$$

A K konstans értéke a $z = 1$ helyettesítéssel közvetlenül adódik. Hogy $F(1) = 0$, az leolvasható, mert ez esetben az integrandus azonosan zéró, a $\ln \Gamma(1) = 0$ egyenlőség pedig jól ismert, és így $K = 0$. Azaz a $\operatorname{Re} z > 0$ esetben érvényes az

$$\int_0^\infty \left\{\frac{e^{-zt}-e^{-t}}{1-e^{-t}} + (z-1)\,e^{-t}\right\}\frac{dt}{t} = \ln \Gamma(z)$$

azonosság.

* A tétel, amelyet felhasználtunk, a következő:

Az $\omega(z) = \int_a^\infty f(t, z)\,dt$ függvény reguláris a (zárt) B tartományban, és itt deriváltja formálisan így képezhető:

$$\omega'(z) = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial z} f(t, z)\,dt,$$

ha

a°) $f(t, z)$ folytonos függvénye argumentumainak az $a \leqq t$, $z \in B$ tartományban.

b°) Bármely rögzített $t \geqq a$ mellett $f(t, z)$ z-nek reguláris függvénye B-ben.

c°) Az

$$\int_a^\infty f(t, z)\,dt$$

integrál *egyenletesen* konvergens B-ben.

A tétel bizonyítása két lépésben történik; az első lépésben nem improprius integrált tekintünk, amikor is a c°) feltétel sem szerepel. Ekkor a bizonyítás a Cauchy-féle integrálformula alkalmazásából, majd a két különböző változó szerinti integrálás felcserélésből áll. Improprius integrál esetén a véges felső határok egy sorozata segítségével az improprius integrált e sorozat határértékeként állítjuk elő; a konvergencia egyenletes B-ben, minthogy az improprius integrál egyenletesen konvergál B-ben. Ekkor pedig a Weierstrass-tétel biztosítja, hogy a határfüggvény is reguláris, továbbá, hogy a differenciálás és határátmenet sorrendje felcserélhető.

7. Állapítsuk meg, hogy hogyan fejezhető ki a Γ függvény segítségével az

$$\int_0^\infty \left\{(z-1)\,e^{-t} + \frac{(1+t)^{-z} - (1+t)^{-1}}{\ln(1+t)}\right\}\frac{dt}{t}$$

paraméteres integrál.

8. Fejezzük ki a Γ függvény segítségével az alábbi paraméteres integrálokat ($b > 0$):

a) $\int_0^\infty \frac{\sin b\,x}{x^z}\,dx; \qquad (0 < z < 2)$

b) $\int_0^\infty \frac{\cos b\,x}{x^z}\,dx; \qquad (0 < z < 1)$

c) $\int_0^\infty \frac{x\,e^{-x^2}}{1-e^{-x}}\,dx; \qquad (0 < \operatorname{Re} z)$

b)

β) 1. Igazoljuk, hogy a

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt$$

integrál a $\operatorname{Re} z > 0$; $\operatorname{Re} w > 0$ tartományban reguláris függvényt állít elő, amelyre érvényesek a

$$B(z, w) \equiv B(w, z)$$

és a

$$B(z, w+1) \equiv \frac{w}{z+w}\,B(z, w)$$

függvényegyenletek.

2. A függvényegyenletekre, illetve az első fajú EULER-integrálra támaszkodva igazoljuk, hogy $B(z, w)$ mindenütt előállítható a következő végtelen szorzat alakjában:

$$B(z, w) = \frac{z+w}{z \cdot w} \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \frac{z\,w}{(z+n)\,(w+n)}\right].$$

3. Igazoljuk, hogy $B(z, w)$ értelmezési tartományán előállítható a bevezetésben megadott POCHHAMMER-féle integrálformulával.

4. Bizonyítsuk be, hogy a $B(z, w)$ függvény kielégíti az alábbi függvényegyenleteket is:

a) $B(z, w+1) = \frac{w}{z} B(z+1, w)$.

b) $B(z, w) \equiv B(z+1, w) + B(z, w+1)$.

5. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}}\, dt$$

integrál a $B(z, w)$ függvényt állítja elő.

6. A $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$ tartományban előállítja-e az

a) $2^{-z-w+2} \int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{2z-1}(1-x)^{2w-1}}{(1+x^2)^{z+w}}\, dx$;

illetve a $p > 0$ feltétel mellett a

b) $(1+p)^z p^w \int_0^1 x^{z-1} \frac{(1-x)^{w-1}}{(x+p)^{z+w}}\, dx$

formula a $B(z, w)$ függvényt?

γ)

1. Igazoljuk a következő reláció helyességét:

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{w \to \infty} w^z B(z, w).$$

Megoldás: A relációt igazolhatjuk a bétafüggvény bármely előállítására támaszkodva. Legtöbb tankönyvben fenti relációt az EULER-féle első, illetve másodfajú integrál kapcsolatba hozatala révén szokták igazolni, ezért mi inkább a 3. § *b) β)* 2. feladatban megadott szorzatalakra támaszkodunk itt. E célból azt kissé átalakítjuk: a szorzat n-edik tényezője így is felírható:

$$1 - \frac{z\,w}{(z+n)(w+n)} = \frac{(z+n)(w+n) - z\,w}{(z+n)(w+n)} = \frac{n(z+w+n)}{(z+n)(w+n)}.$$

Ezt figyelembe véve, $B(z, w)$ ilyen alakban is felírható:

$$B(z, w) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!\,(z+w)(z+w+1)\ldots(z+w+n)}{z(z+1)\ldots(z+n)\cdot w\cdot(w+1)\ldots(w+n)}.$$

Így tehát

$$\lim_{w \to \infty} w^z B(z, w) = \lim_{w \to \infty} \lim_{n \to \infty} \frac{n!\,(z+w)(z+w+1)\ldots(z+w+n)}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)\,w(w+1)\ldots(w+n)}\, w^z.$$

Mármost e kifejezés alakja és $\Gamma(z)$ ismert EULER—WEIERSTRASS-féle határérték-előállítása — amely nagyon hasonlít e kifejezés egy részére — arra csábít, hogy megpróbáljuk a határátmenetek sorrendjét felcserélni. Könnyű belátni azonban, hogy ennek az elégséges feltétele (pl. n-beli egyenletes konvergencia) nincs meg, és a számolás mutatja, hogy így helytelen eredményt kapunk. Ezzel szemben a számlálót és nevezőt is bővítve $\Gamma(z+w)$-vel, $\Gamma(z)$-vel és $\Gamma(w)$-vel, felhasználva továbbá a Γ függvényre jellemző függvényegyenletet, amely szerint pl.

$$\Gamma(z)\cdot z(z+1)\dots(z+n)=\Gamma(z+1)(z+1)\dots(z+n)=\dots=\Gamma(z+n+1),$$

végül pedig a Γ függvény aszimptotikáját, amelynek segítségével már a 3. § *a) ε)* 4. feladatában igazoltuk a

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\Gamma(\alpha+z)}{\Gamma(z)\cdot z^{\alpha}}=1$$

relációt, könnyen adódik állításunk igazolása. Ugyanis

$$\lim_{w\to\infty} w^z B(z,w)=\lim_{w\to\infty}\left\{w^z\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(z)\,\Gamma(w)\,\Gamma(z+w+n+1)}{\Gamma(z+w)\,\Gamma(z+n+1)\,\Gamma(w+n+1)}\right\}=$$

$$=\lim_{w\to\infty}\left\{w^z\cdot\frac{\Gamma(z)\cdot\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(z+n+1)}n^z\cdot\frac{\Gamma(z+w+n+1)}{\Gamma(w+n+1)}\cdot\frac{1}{n^z}\right\}=$$

$$=\lim_{w\to\infty}\left\{w^z\cdot\frac{\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\cdot\Gamma(z)\cdot 1\cdot 1\right\}=\Gamma(z)\lim_{w\to\infty}\left\{\frac{\Gamma(w)\cdot w^z}{\Gamma(z+w)}\right\}=\Gamma(z)\cdot 1,$$

amit igazolni akartunk.

2. Bizonyítsuk be, hogy érvényes a

$$\frac{\Gamma(z)\cdot\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\equiv B(z,w)$$

azonosság — a jellemző függvényegyenletekre támaszkodva.

Útbaigazítás: Megadtuk a bevezetésben, hogy a $B(z,w)$ függvényre milyen két függvényegyenlet, illetve egy további „kezdeti érték" feltétel jellemző — éspedig a mindkét változójukban meromorf függvények közül egyedül a bétafüggvényre. Valamennyi könnyen leolvasható az azonosság bal oldaláról.

Meg kell egyébként jegyeznünk, hogy az előző (1) feladat kidolgozásánál lényegében a fenti függvényegyenlet érvényességét is igazoltuk.

3. Igazoljuk, hogy a bétafüggvény kielégíti az alábbi „multiplikációs" függvényegyenletet:

$$B(np;\,nq)=n^{-nq}\,\frac{B(p;\,q)\cdot B\left(p+\frac{1}{n};\,q\right)\dots B\left(p+\frac{n-1}{n};\,q\right)}{B(q;\,q)\,B(2q;\,q)\dots B[(n-1)q;\,q]}.$$

Útbaigazítás: A béta- és gammafüggvények ismert összefüggéseire és a gammafüggvény megfelelő multiplikációs függvényegyenletére támaszkodhatunk.

4. Igazoljuk az alábbi függvényegyenletek helyességét:

a) $B(z;\ z)\cdot B\left|z+\frac{1}{2};\ z+\frac{1}{2}\right|\equiv\frac{\pi}{2^{1z-1}\cdot z}$.

b) A $\operatorname{Re} y>1$ feltétel mellett

$$B(x;\ y)+B(x+1;\ y)+B(x+2;\ y)+\ldots+B(x+n;\ y)+\ldots\equiv B(x;\ y-1).$$

c) $B(a,b)\cdot B(a+b,c)\equiv B(b,c)\ B(b+c,a)$.

5. Igazoljuk, hogy az $x>0;\ x+y>0$ feltételek mellett érvényes az alábbi reláció:

$$\int_0^1\frac{z^{x-1}(1-z^y)}{1-z}\,dz=\lim_{\delta\to 0}\{B(x;\ \delta)-B(x+y;\ \delta)\}=$$

$$=\psi(x+y)-\psi(x)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)\Big|_{z=x+y}-\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)\Big|_{z=x}.$$

6. Igazoljuk, hogy a bétafüggvény logaritmusa az alábbi integrállal is megadható:

$$\ln B(z,w)=\ln\frac{z+w}{z\cdot w}+\int_0^1\frac{(1-t^z)\,(1-t^w)}{(1-t)\ln t}\,dt.$$

7. Igazoljuk, hogy a béta- és gammafüggvények közötti alábbi összefüggések is érvényesek

a) $\Gamma(z)=\sqrt{B\left(z;\ \frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(2z)}{2^{2z-1}}}$

b) $\Gamma(z)=\sqrt[2^n]{\Gamma(2^n z)}\cdot 2^{-(nz-1+2-n)}\cdot\prod_{r=1}^{n}\sqrt[2^r]{B\left(2^{r-1}z;\ \frac{1}{2}\right)};\quad n=1,2,\ldots$

c) $\Gamma(z)=2\cdot z^2\cdot e^{-z}\prod_{r=1}^{\infty}\sqrt[2^r]{B\left(2^{r-1}z;\ \frac{1}{2}\right)}$.

δ)

1. Határozzuk meg az $y>0$ esetben az

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^y}}$$

integrál értékét.

Megoldás: Végezzük el az $x^y = t$ helyettesítést:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^y}} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{y}\, t^{\frac{1}{y}-1}}{\sqrt{1-t}}\, dt = \frac{1}{y}\int_0^1 t^{\left(\frac{1}{y}-1\right)} (1-t)^{-\frac{1}{2}}\, dt =$$

$$= \int_0^1 t^{\frac{1}{y}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1}\, dt = \frac{1}{y} B\left|\frac{1}{y}; \frac{1}{2}\right| =$$

$$= \frac{1}{\gamma} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{y}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left|\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\right|} = \frac{1}{y} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{y}\right)}{\Gamma\left|\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\right|}.$$

Emellett a LEGENDRE-formula szerint (l. a 3. § *a) δ)* 1. feladatát)

$$\Gamma\left|\frac{1}{y}\right| \Gamma\left|\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{2}{y}-1}}\, \Gamma\left|\frac{2}{y}\right|,$$

azaz

$$\left[\Gamma\left|\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\right|\right]^{-1} = \frac{2^{\frac{2}{y}-1}}{\sqrt{\pi}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{y}\right)}{\Gamma\left|\frac{2}{y}\right|}.$$

Végül tehát

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^y}} = \frac{1}{y} B\left|\frac{1}{y}; \frac{1}{2}\right| = \frac{2^{\frac{2}{y}-1}}{y}\, \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{y}\right)}{\Gamma\left|\frac{2}{y}\right|}.$$

2. Határozzuk meg az

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\varphi \cdot \cos^{2y-1}\varphi\, d\varphi$$

integrál értékét.

Útbaigazítás: Végezzük el a $t = \sin^2\varphi$ helyettesítést!

3. Igazoljuk a következő képlet helyességét:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,(1-x)^{z-1} y^z\,(1-y)^{w-1}\, dx\, dy = B(z,w) \int_0^1 f(t)\cdot(1-t)^{z+w-1}\, dt,$$

— feltéve, hogy a kettős és mindkét kétszeres integrál létezik.

4. Felhasználva az előző feladat megoldásának gondolatmenetét, igazoljuk — feltéve, hogy $f(t)$ folytonos $[0, 1]$-ben — az alábbi átalakítás helyességét ($0 < \lambda < 1$; $\operatorname{Re} z > 0$; $\operatorname{Re} w > 0$):

$$\int_0^{1-\lambda} \left\{ \int_0^{1-\lambda-x} f(x+y+\lambda)\, x^{z-1} y^{w-1}\, dy \right\} dx = B(z, w) \int_0^{1-\lambda} f(\lambda + t)\, t^{z+w-1}\, dt.$$

5. Általánosítsuk a 4. feladat eredményét: igazoljuk, hogy érvényes a következő integrálképlet:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x+y+z)\, x^{u-1} y^{v-1} z^{w-1}\, dz\, dy\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)\,\Gamma(w)}{\Gamma(u+v+w)} \int_0^1 f(t)\, t^{u+v+w-1}\, dt,$$

feltéve, hogy $f(t)$ folytonos $[0, 1]$-ben és $\operatorname{Re}\mu > 0$; $\operatorname{Re} v > 0$; $\operatorname{Re} w > 0$.

6. Számítsuk ki az

$$\iint_T x^p y^q\, dx\, dy$$

integrál értékét a 4. feladat eredményeinek felhasználásával, ha a T tartomány azon $P(x, y)$ pontokat tartalmazza, amelyek kielégítik az

$$x \geqq 0;\ y \geqq 0;\ x^\alpha + y^\beta \leqq 1$$

egyenleteket ($\alpha > 0$; $\beta > 0$).

Megoldás: Hogy olyan alakúra redukálhassuk a kiszámítandó kettős integrált mint amilyen a 4., illetve 5. feladatban szerepel, a változók megfelelő transzformációjával az integrációs határokat kell megfelelően megváltoztatni. E célból bevezetjük az új ξ és η integrációs változókat az

$$\eta = y^\beta;\quad \xi = x^\alpha$$

helyettesítésekkel. Így

$$\iint_T x^p y^q\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} \xi^{\frac{p}{\alpha}} \eta^{\frac{q}{\beta}} \frac{1}{\beta} \eta^{\frac{1}{\beta}-1} \cdot \frac{1}{\alpha} \xi^{\frac{1}{\alpha}-1}\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta} \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} \xi^{\frac{p+1}{\alpha}-1} \eta^{\frac{q+1}{\beta}-1}\, d\eta\, d\zeta;$$

és ez — a 4., illetve 5. feladat eredményei szerint — egyenlő

$$\frac{1}{\alpha\beta} B\left(\frac{p+1}{\alpha};\ \frac{q+1}{\beta}\right) \int_0^1 t^{\frac{p+1}{\alpha}+\frac{q+1}{\beta}-1}\, dt = \frac{B\left(\frac{p+1}{\alpha};\ \frac{q+1}{\beta}\right)}{\beta(p+1)+\alpha(q+1)}\text{-gyel.}$$

7. Számítsuk ki az a; b; c nagyságú féltengelyekkel rendelkező, a koordináta-rendszerben centrálisan elhelyezkedő ellipszoid z tengelyre vett inercianyomatékát, éspedig az 5. feladat egyszerűsítő képletének felhasználásával.

8. Legyen $p + q > 1$, de $q < 1$. Határozzuk meg az

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q-2} t \cdot \cos (p - q)\, t\, dt$$

integrál értékét.

c)

1. Határozzuk meg a

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{(n - \alpha)(n + \beta + \gamma)}{(n + \beta)(n + \delta)} \left(1 + \frac{\alpha}{n + 1}\right)$$

szorzat értékét.

2. Igazoljuk, hogy $B\left(x; \frac{1}{2}\right)$ a következő részlettörtes alakban állítható elő az $x > 0$ esetben:

$$B\left(x; \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \cdot \frac{1}{x + n}.$$

3. Legyen $0 < v < 1$. Igazoljuk az alábbi képlet helyességét:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1 + x)^{1-v}} dx = \Gamma(v) \left\{\cos\left(\frac{\pi v}{2} - 1\right) - \frac{1}{\Gamma(v + 1)} + \frac{1}{\Gamma(v + 3)} - \frac{1}{\Gamma(v + 5)} + \ldots\right\}.$$

4. Legyen $p > 0$ és $p + s > 0$. Igazoljuk, hogy $B(p;\ p + s)$ előállítható a következő alakban:

$$B(p;\ p + s) = \frac{B(p;\ p)}{2^s} \left\{1 + \frac{s(s - 1)}{2(2p + 1)} + \frac{s(s - 1)(s - 2)(s - 3)}{2 \cdot 4 \cdot (2p + 1)(2p + 3)} + \ldots\right\}.$$

5. Igazoljuk, hogy $p > \frac{1}{2}$ esetén érvényes $\Gamma(2p)$ alábbi előállítása:

$$\Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma^2(p) \cdot \left[\frac{2p^2}{2p + 1} \left\{1 + \frac{1^2}{2(2p + 3)} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2 \cdot 4 \cdot (2p + 3)(2p + 5)} + \ldots\right\}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

6. Legyen s tetszőleges pozitív szám. Igazoljuk, hogy az

$$f_s(x) = \begin{cases} \cos^s x, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \\ f_s(x + k\pi); & k = \pm 1; \pm 2; \ldots \end{cases}$$

függvény FOURIER-sora ilyen alakú:

$$f_s(x) = \frac{1}{2^{s-1}} \cdot \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma^2\left|1+\frac{s}{2}\right|}\left\{\frac{1}{2} + \frac{s}{s+2}\cos 2x + \frac{s(s-2)}{(s+2)(s+4)}\cos 4x + \ldots\right\}.$$

7. Állapítsuk meg — a 6. feladat eredményeire is támaszkodva —, hogy mely függvény FOURIER-sorát adjuk meg az alábbiakban ($s > 0$):

$$\frac{a}{2^{s-1}}\Gamma(s+1)\left\{\frac{\cos a x}{\Gamma\left|1+\frac{s}{2}+\frac{a}{2}\right|\Gamma\left|1+\frac{s}{2}-\frac{a}{2}\right|} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos 3 a x}{\Gamma\left|1+\frac{s}{2}+3\frac{a}{2}\right|\Gamma\left|1+\frac{s}{2}-3\frac{a}{2}\right|} + \ldots\right\}.$$

8. Legyenek a és b pozitív számok, továbbá $\mathrm{Re}\, z > 0$. Számítsuk ki az alábbi integrálok értékét:

$$a)\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{a(b+xi)}\,\frac{dx}{(b+x\,i)^{z+1}}; \qquad b)\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(b+xi)}\,\frac{dx}{(b+x\,i)^{z+1}}.$$

4. §. ELLIPTIKUS FÜGGVÉNYEK ÉS INTEGRÁLOK

a) A kettős periódusú meromorf függvényekről

α) Meromorf függvények periódusairól

Az ω állandót az $f(z)$ (meromorf) függvény periódusának nevezzük, ha az

$$f(z+\omega) \equiv f(z)$$

függvényegyenlet z bármely értékére teljesül.

Jelöljük mármost $\Omega(f)$-fel az $f(z)$ meromorf függvény összes periódusainak halmazát. Ω — könnyen belátható ez — ún. *modul*, amin az értendő, hogy bármely két ω_1 és ω_2 periódussal együtt azok összege és különbsége is periódus, azaz Ω-hoz tartozik.

Az Ω modul első, illetve másodfajú aszerint, hogy nincs, illetőleg van a végesben sűrűsödési helye. Triviális az az állítás, hogy másodfajú csak akkor lehet egy modul, ha tetszőlegesen kis abszolút értékű periódusokat is tartalmaz.

Könnyen belátható, hogy — kivéve az azonosan állandó függvényt, amelynek bármely szám periódusa — meromorf függvénynek nem lehet tetszőlegesen kis abszolút értékű periódusa, azaz periódusainak modulja nem lehet másodfajú. Az $f(z)$ és a $\varphi(z) = f(z) - c$ függvénynek (c tetszőleges állandó) összes periódusainak halmaza ugyanis nyilván azonos. Ha mármost az $f(z)$ meromorf függvénynek a periódusmodulja másodfajú lenne, akkor ugyanilyen lenne a $\varphi(z) = f(z) - c$ függvénye is, amelyben c megválasztható úgy, hogy $\varphi(z)$-nek legalább egy — pl. z_0 — zérushelye legyen. Ez a z_0 azonban akkor egyszersmind a zérushelyek sűrűsödési pontja is lenne („végtelen kis periódusok" létezése miatt), azaz lényegesen szinguláris pontja $\varphi(z)$-nek; ilyen azonban nem lehet, lévén f és így φ is meromorf.

Igen könnyen — egyszerű geometriai megfontolások révén — belátható, hogy elsőfajú modul elemei előállíthatók vagy egyetlen (ún. primitív) periódus egész számú többszöröseiként vagy két (ismét primitívnek nevezett) periódus segítségével mint azok egészegyüttható lineárkombinációi. Utóbbi esetben a két primitív periódus viszonya nem lehet valós szám. Ha ugyanis lenne két olyan primitív periódus, amelynek viszonya valós szám (de nem racionális, ha ugyanis e viszony racionális, akkor egyik sem primitív, hanem mindkettő mint egyetlen primitív periódus többszöröse állítható elő) vagy tetszőleges három primitív periódus, akkor ezekből képezhető lenne tetszőlegesen kis abszolút értékű periódus is egészegyüttható lineárkombináció révén.

Ha az elsőfajú modul egyetlen primitív periódus révén származtatható, akkor a szóban forgó (meromorf) függvény periodikus (pontosabban egyszeresen periodikus), ha két primitív periódus révén (amikor is Ω pontjai az ún. periódus-paralelogramma-hálózat szögpontjai), akkor a függvényt kétszeresen periodikusnak vagy kettős periódusúnak nevezzük.

β) Egyszeresen periodikus függvények és Fourier-soruk

Legyen $f(z)$ (egyszeresen) periodikus függvény, primitív periódusát ω_0-val jelöljük. Készítsünk a z síkon egy (egyik irányban végtelen kiterjedésű) sávot úgy, hogy egy tetszőleges egyenesen végigcsúsztatva az ω_0 vektort, az általa súrolt területet tekintjük. Ha egyetlen ilyen sávon ismerjük az $f(z)$ függvény értékeit, a periodicitásra tekintettel azt bárhol ismertnek tekinthetjük. Egy tetszőleges ilyen sávot a

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{\omega_0} z}$$

függvény — éspedig a ζ sík origójának és végtelen távoli pontjának kivételével konformisan — a teljes ζ síkra képezi le. Ennek megfelelően az

$$f[z(\zeta)] = \varphi(\zeta)$$

függvény az egylevelű ζ síkon már nem periodikus, de egyértékű (hiszen z és $z + n\,\omega_0$-nak ugyanazon f érték felel meg). Ha tehát az $f(z)$ függvény — egy periódussávot tekintve csak — egyértelműen invertálható, akkor a $\varphi(\zeta)$ függvény minden mellékfeltétel nélkül egyértelműen invertálható.

Ha a periodikus $f(z)$ függvény *egész* függvény, akkor a $\varphi(\zeta)$ függvénynek csak az origóban van szinguláris pontja (éspedig a $z = \frac{\omega_0}{2\pi i} \ln \zeta$ relációból következően lényegesen szinguláris pontja), azaz itt LAURENT-sorba fejthető, amely az egész síkon előállítja φ-t; más szóval $f(z)$ az egész síkon FOURIER-sorba fejthető:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \zeta^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{k \frac{2\pi i}{\omega_0} z}.$$

γ) Az elliptikus függvények alaptulajdonságai

A kettős periódusú meromorf függvényeket *elliptikus* függvényeknek szoktuk nevezni. Az Ω modult egyértelműen jellemzi a két primitív periódus: ω_1 és ω_2 (a szokásos indexelési sorrend: $-\pi \leqq \arg \omega_1 < \arg \omega_2 < \pi$). Az összes olyan elliptikus függvény, amelynek közös az Ω modulja, *függvénytestet* alkot. Ezen azt kell értenünk, hogy:

A) Valamennyi azonosan állandó függvény ide tartozik.

B) Az f_1 és f_2 függvényekkel együtt szükségképp azok összege, különbsége, szorzata és $f_2 \not\equiv 0$ esetén az $\frac{f_1}{f_2}$, illetve $f_1 \not\equiv 0$ esetén $\frac{f_2}{f_1}$ is a testhez tartozik.

Könnyen belátható, hogy bármely elliptikus függvény deriváltjai is elliptikus függvények, ugyanaz a moduljuk is, azaz ugyanahhoz a függvénytesthez tartoznak.

Az elliptikus függvényt nyilván teljesen jellemzik egyetlen — a két primitív periódus által kifeszített — periódus-paralelogrammában mutatott tulajdonságai, illetve felvett értékei.* Érvényesek a következő tételek:

* A periódus-paralelogrammához csak annak egyik csúcspontját és a belőle kiinduló két oldalélet — azok másik végpontja nélkül! — számítjuk hozzá. A határ többi helyén felvett függvényértékek ti. a kettős periodicitás miatt ezen adatok alapján már számíthatóak.

C) Az elliptikus függvénynek egy periódus-paralelogrammában csak véges sok pólusa, illetve zérushelye lehet. (Hiszen meromorf.)

Az elliptikus függvényt k-ad fokúnak nevezzük, ha (bármely) periódus-paralelogrammában pontosan k pólusa van (multiplicitással számolva).

D) A nulladfokú elliptikus függvények azonosan állandók. (Gondoljunk a LIOUVILLE-tételre.)

E) A (bármelyik) periódus-paralelogrammába eső reziduumok összege zérus. (A kerületen vett integrál ti. a periodicitás miatt zérus.)

Következmény: elsőfokú elliptikus függvény nem létezhet.

F) Legyen $f(z)$ tetszőleges, $r \geqq 2$-ed fokú elliptikus függvény, c pedig tetszőleges állandó. Ez esetben egy periódus-paralelogrammában az

$$f(z) - c = 0$$

egyenletnek (multiplicitással) pontosan gyöke van. (Bizonyítását a feladatok között adjuk meg.)

G) Ha $b_1, b_2, \ldots, b_r$-rel jelöljük valamely periódus-paralelogrammában az r-ed fokú elliptikus zérushelyeit, $a_1, a_2, \ldots, a_r$-rel pedig a pólusait (multiplicitással felírva), akkor

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_r \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_r, \text{ mod } (\omega_1; \omega_2),$$

ahol e jelölés értelme: található olyan (m, n) — egész számokból álló — számpár, amellyel:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_r = b_1 + b_2 + \ldots + b_r + m\,\omega_1 + n\,\omega_2.$$

b) Az elliptikus függvények Weierstrass-féle rendszerezése

Az elliptikus függvények WEIERSTRASS-féle és JACOBI-féle elmélete is úgy épül fel, hogy megkonstruálják a legegyszerűbb típusú elliptikus függvényt, és erre támaszkodva vizsgálják az általánosabb függvényeket. Láttuk az előzőekben, hogy a nem azonosan állandó elliptikus függvény legalább másodfokú kell hogy legyen. Mindkét elmélet ennek megfelelően egy-egy másodfokú függvényt definiál; WEIERSTRASS az ún. *pe* (jelölése $\wp$) JACOBI pedig a sinus amplitudinis (jelölése sn) függvényt tekinti legegyszerűbbnek. Előbbinek bármely periódus-paralelogrammában egy másodrendű pólusa van (LAURENT-sorának fő része így nem tartalmazhat elsőfokú tagot, hogy a reziduumok összege a periódus-paralelogrammában 0 legyen) utóbbinak két elsőrendű pólusa van (ellentett előjelű reziduumokkal).

α) A $\wp$ függvény

WEIERSTRASS a $\wp$ függvényt úgy definiálja, hogy annak egy másodrendű pólusa — az origót tartalmazó periódus-paralelogrammában tehát az egyetlen pólus — épp az origóban legyen. Az ezen pontra támaszkodó LAURENT-sorfejtés fő része tehát $\frac{A}{z^2}$ alakú; A választása a legegyszerűbben: $A = 1$. A $\wp$ függvény pólushelyei a periodicitás alapján a

$$z_{m,n} = m\,\omega_1 + n\,\omega_2 \quad (m, n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$$

helyek, a fő részek pedig — ismét a periodicitásra támaszkodva —

$$\frac{1}{(z - z_{m,n})^2}$$

alakúak. Ennek alapján megkonstruálható a $\wp$ függvény MITTAG—LEFFLER-féle részlettörtes előállítása:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{(z - z_{m,n})^2} - \frac{1}{z_{m,n}^2}\right],$$

ahol a szummációs jel fölötti vessző azt jelzi, hogy az $m = 0$, $n = 0$ indexpárnak megfelelő tag nem szerepel (ezt pótolja a kiemelt $\frac{1}{z^2}$). Azt a feladatok között igazoljuk, hogy az így konstruált $\wp$ függvény valóban kettős periódusú, továbbá, hogy primitív periódusai ω_1-gyel, illetve ω_2-vel egyenlőek (ahol is $\mathrm{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$).

Könnyen belátható a fenti állítás alapján, hogy a *pe*-függvény páros. Nevezetes értékek a félperiódusokban, illetve ezek összegénél felvett értékek; vessük fel ugyanis azt a kérdést, hogy egy rögzített periódus-paralelogrammán belül hány megoldása van a

$$\wp(z) = \wp(v)$$

egyenletnek (ahol v ugyanezen paralelogramma egy rögzített pontja). Másodfokú függvényről lévén szó, szükségképp két megoldás adódik (Lásd a 4. § *a) γ) F)* tételét); közülük az egyik szükségképp a $z = v$ hely, a másik tehát — a periodicitásra és a $\wp$ függvény párosságára tekintettel — a $z = -v$ helynek a tekintett periódus-paralelogrammába eső megfelelő pontja [ti. a $-v + m\omega_1 + n\omega_2$ pontokban mindenütt ugyanazt az értéket veszi fel $\wp$; ezek közül egy és csakis egy a tekintett periódus-paralelogrammába esik; ezt így jelöljük: $z = -v$, mod $(\omega_1; \omega_2)$].

Fenti egyenletnek tehát csak akkor lehet egyetlen kettős gyöke a tekintett paralelogrammában, ha

$$v \equiv -v, \quad \text{illetve} \quad 2v \equiv 0 \bmod (\omega_1; \omega_2),$$

azaz, ha

$$v = \frac{m\omega_1 + n\omega_2}{2}.$$

A szokásos jelölések:

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = e_1; \qquad \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = e_2; \qquad \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = e_3.$$

Összefoglalva: a

$$\wp(z) = \wp(v)$$

egyenletnek rögzített periódus-paralelogrammában akkor és csakis akkor van kettős gyöke, ha

$$\wp(v) = e_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

E pontokban ekkor azonban szükségképp fennáll a

$$\wp'(z) = 0$$

egyenlet is, azaz pl. az origo csúcspontú periódus-paralelogrammában a $\wp'(z) = 0$ egyenlet megoldásai (szükségképp egyszeres gyökök):

$$z_1 = \frac{\omega_1}{2}; \quad z_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}; \quad z_3 = \frac{\omega_2}{2}.$$

Ez az összes megoldás, hiszen $\wp'(z)$ pontosan harmadfokú elliptikus függvény.

Fontos szerepet játszik még az elliptikus függvények WEIERSTRASS-féle elméletében $\wp$ negatív előjellel vett egyik primitív függvénye, a dzétafüggvény $[\zeta(z)]$:

$$\zeta'(z) = -\wp(z); \quad \zeta(z) \equiv \frac{1}{z} + \sum_{m,n=-\infty}{}' \left[\frac{1}{z - z_{m,n}} + \frac{1}{z_{m,n}} + \frac{z}{z_{m,n}^2}\right]$$

(amely nyilván nem lehet elliptikus függvény, hiszen elsőfokú elliptikus függvény nem létezik). Ugyancsak fontos a szigmafüggvény $[\sigma(z)]$ szerepe is; ez az egyik függvény, amelynek $\zeta(z)$ a logaritmikus deriváltja. Így a $\sigma(z)$ transzcendens egész függvény WEIERSTRASS-féle szorzat-előállítása:

$$\sigma(z) \equiv z \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \left[\left(1 - \frac{z}{z_{m,n}}\right) e^{\frac{z}{z_{m,n}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_{m,n}}\right)^2}\right].$$

E függvény egyszeres 0 helyei épp ζ egyszeres, azaz $\wp$ kétszeres pólusaival esnek egybe.

E két utóbbi függvényt — és a velük szoros rokonságban levő, a későbbiekben definiálandó ϑ függvényeket is — *kváziperiodikus*nak szokták nevezni. Magyarázat: nem periodikusak ugyan, a rájuk jellemző függvényegyenletek azonban — amelyeket a következő pontokban ismertetünk — igen hasonló alakúak a periodicitást kifejező függvényegyenletekhez; ennek többek között az a következménye, hogy egyetlen periódus-paralelogrammában, ismerve értékeiket, elemi műveletekkel — bár nem egyszerű eltolással, mint az elliptikus, periodikus függvényeknél — az egész síkon számítani tudjuk a függvényértékeket.

β) Jellemző függvényegyenletek

Az alábbiakban elsősorban a $\wp$ függvényt jellemző differenciálegyenletet adjuk meg:

$$[\wp'(z)]^2 \equiv 4\,[\wp(z) - e_1] \cdot [\wp(z) - e_2] \cdot [\wp(z) - e_3].$$

E differenciálegyenlet igen egyszerűen adódik: ugyanis a bal és a jobb oldal is elliptikus függvény, mindkettő hatodfokú. Zérushelyeik és pólusaik pontosan egybeesnek, ugyanaz a sorfejtésük fő része is a hatszoros pólus origóban. A bal és jobb oldal különbsége tehát egyrészt elliptikus, másrészt 0-ad fokú (tehát azonosan állandó), harmadrészt az origóban — tehát szükségképp azonosan — eltűnik.

A differenciálegyenlet egy más alakja:

$$\wp'^2 = 4\,\wp^3 - g_2\,\wp - g_3,$$

ahol egyrészt:

$$e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3 = -\frac{1}{4} g_2; \quad e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3$$

(továbbá könnyen beláthatóan fennállnak az

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0; \quad \Delta = 16\,(e_1 - e_2)^2\,(e_1 - e_3)^2\,(e_2 - e_3)^2 = g_2^3 - 27\,g_3^2 \neq 0$$

egyenletek is; előbbi azt fejezi épp ki, hogy *nincs* másodfokú tag a jobboldalon, ami $\wp'^2 - 4\,\wp^3$ origo körüli sorfejtéséből — minthogy az $\frac{1}{z^2}$ típusú taggal kezdődik — azonnal következik), másrészt a részlettörtes alak egyes tagjainak az origo körüli sorfejtéséből majd azok összegének hatványsorba történő átrendezéséből (ami a WEIERSTRASS-tétel értelmében biztosan megengedett) leolvasható, hogy

$$g_2 = 60 \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{z_{m,n}^4}; \qquad g_3 = 140 \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{z_{m,n}^6}.$$

Ezen egyenletek módot adnak arra, hogy a $\wp$ függvényt konkrétan jellemző bármelyik adatcsoport — azaz vagy az (ω_1, ω_2) primitív perióduspár, vagy a $(g_2; g_3)$ számpár, vagy pedig az $(e_1; e_2; e_3)$ függvényértékhármas — ismeretében a másik két adatcsoportot (legalábbis elvben) számítani tudjuk.*

A másik nevezetes függvényegyenlet a $\wp$ függvény addíciós tételét adja:

$$\wp(z_1 + z_2) \equiv \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)}\right]^2 - \wp(z_1) - \wp(z_2),$$

ahol természetesen $\wp'(z_1)$, illetve $\wp'(z_2)$ a differenciálegyenlet alapján $\wp(z_1)$, illetve $\wp(z_2)$ megfelelő függvényével helyettesíthetőek. Bizonyítása ugyanolyan úton történhet, mint a differenciálegyenleté, azaz pl. az egyenlet két oldalán szereplő pólushelyek összehasonlításával.

γ) A ζ és σ függvények vizsgálata

A definícióból következően a ζ függvény páratlan. Abból a tényből, hogy deriváltja kettős periódusú, következik az alábbi két fontos azonosság:

$$\zeta(z + \omega_1) - \zeta(z) \equiv \eta_1; \qquad \zeta(z + \omega_2) - \zeta(z) \equiv \eta_2,$$

ahol az állandók jelölésére használt η szokásos, és a továbbiakban is fontos szerepe lesz. A $z = -\frac{\omega_1}{2}$, illetve $z = -\frac{\omega_2}{2}$ helyettesítésből következik, hogy

$$\eta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right); \qquad \eta_2 = 2\zeta\left(\frac{\omega_2}{2}\right).$$

* Meg kell jegyeznünk, hogy a primitív periódusok meghatározása nem lehet egyértelmű. Legyen ugyanis adva egy tetszőleges primitív perióduspár, pl. ω_1 és ω_2. Ez esetben található (éspedig végtelen sokféleképp) olyan $(\tilde{\omega}_1; \tilde{\omega}_2)$ új perióduspár, amelyekkel tetszőleges $m\,\omega_1 + n\,\omega_2$ periódus kifejezhető egész együtthatós lineárkombinációként, azaz megadható bármely (m, n) egész számokból álló számpárhoz egy másik $(\tilde{m}, \tilde{n})$ — ugyancsak egész számokból álló — számpár, amelyekkel érvényes az

$$m\,\omega_1 + n\,\omega_2 = \tilde{m}\,\tilde{\omega}_1 + \tilde{n}\,\tilde{\omega}_2$$

egyenlőség, és viszont. Ez azonban szükségképp azt jelenti, hogy — jóllehet a periódus-paralelogrammák különböznek, mégis — fennáll a

$$\wp(z;\ \omega_1;\ \omega_2) \equiv \wp(z;\ \tilde{\omega}_1;\ \tilde{\omega}_2)$$

azonosság. Éspedig bármely olyan $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ egész számokból álló mátrixszal, amelynek determinánsa 1 vagy -1-gyel egyenlő, megadható ilyen ekvivalens perióduspár:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_2 \\ \tilde{\omega}_2 &= \gamma\,\omega_1 + \delta\,\omega_2 \end{aligned}; \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \pm 1.$$

A jellemző függvényegyenlet az előző azonosságok iterálásával adódik:

$$\zeta(z + m\,\omega_1 + n\,\omega_2) \equiv \zeta(z) + m\,\eta_1 + n\,\eta_2.$$

A periódus-paralelogramma peremén vett integrál értékét kiszámítva, és a függvényegyenletet figyelembe véve az

$$\eta_1\,\omega_2 - \eta_2\,\omega_1 = 2\,\pi\,i$$

(LEGENDRE-féle) összefüggés adódik a szereplő állandók között.

Könnyen belátható, hogy $\sigma(z)$ is páratlan függvény. A rá jellemző függvényegyenlet:

$$\sigma(z + m\,\omega_1 + n\,\omega_2) \equiv (-1)^{m+n+mn} \cdot e^{(m\eta_1+n\eta_2)\left(z+\frac{m\omega_1+n\omega_2}{2}\right)} \cdot \sigma(z).$$

δ) Elliptikus függvények előállítása a $\wp$, a ζ, illetve a σ függvény segítségével

Bármely páratlanadfokú elliptikus függvény előállítható mint az ugyanazon primitív periódusokkal bíró $\wp$ függvény egy — megfelelő — polinomjának és $\wp$ deriváltjának szorzata. Bármely páros fokú elliptikus függvény előállítható mint $\wp$ egy polinomja. Egy tetszőleges elliptikus függvény előállítható tehát egy $\wp'$-vel szorzott $\wp$-polinom és egy (másik) $\wp$-polinom összegeként.

Bármely $f(z)$ elliptikus függvény, amelynek valamely periódus-paralelogrammában a $z = a_k$ helyeken $(k = 1, 2, \ldots, s)$ vannak pólusai és a megfelelő fő részek

$$\sum_{m=1}^{p_k} \frac{A_{m,k} \cdot m!}{(z - a_k)^m} \qquad (k = 1, 2, \ldots, s)$$

alakúak, előállítható az ugyanazon primitív periódusokra épült ζ függvény segítségével az alábbi alakban:

$$f(z) \equiv C + \sum_{k=1}^{s} \sum_{m=1}^{p_k} A_{m,k} \cdot \zeta^{(m-1)}(z - a_k).$$

Bármely $f(z)$ elliptikus függvény, amelynek egy periódus-paralelogrammában a $\{b_k\}$ pontokban zérushelyei, az $\{a_k\}$ pontokban pólusai vannak $(k = 1, 2, \ldots, s;\ s \geqq 2;\ \sum_1^s a_k \equiv \sum_1^s b_k)$ előállítható a σ függvény segítségével az alábbi alakban:

$$f(z) \equiv C + \frac{\prod_{k=1}^{s} \sigma(z - b_k)}{\prod_{k=1}^{s} \sigma(z - a_k)}.$$

A második előállítás a meromorf függvények részlettörtes, a harmadik pedig egészfüggvények segítségével történő előállítása analógiájának tekinthető.

ε) A thétafüggvények. Az elliptikus függvényekkel kapcsolatos számításokat nagyon megkönnyíti bizonyos gyorsan konvergáló sorokkal előállítható függvények segítségül hívása; ezeket és az elliptikus függvényekkel való kapcsolataikat adjuk meg az alábbiakban.

A következő fontos jelöléseket vezetjük be: a félperiódusok részére: $\omega = \frac{\omega_1}{2}$; $\omega' = \frac{\omega_2}{2}$; viszonyuk: $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega'}{\omega}$; ezzel kapcsolatos a $h = e^{i\pi\tau}$ mennyiség is. $\zeta(z)$ félperiódusokbeli értéke helyett azok fele: $\eta = \frac{\eta_1}{2} = \zeta(\omega)$; $\eta' = \frac{\eta_2}{2} = \zeta(\omega')$; az első periódusra nézve redukált új változó: $v = \frac{z}{2\omega}$; ezzel kapcsolatos az u változó is; v az u változó logaritmusának $\frac{1}{\pi i}$-szerese: $u = e^{i\pi v} = e^{i\frac{\pi}{2\omega}z}$. Az $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i$ egyenlet következménye: $\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{1}{2}\pi i$. Legyen végül $\tau = r + is$; ekkor a $-\pi \leqq \arg\omega_1 < \arg\omega_2 < \pi$ megállapodásból $s > 0$, azaz

$$|h| = |e^{i\pi(r+is)}| = e^{-\pi s} < 1$$

következik, ami a későbbiek szempontjából igen lényeges.

Mármost a

$$\varphi(z;\ a, b) = e^{az^2+bz} \cdot \sigma(z)$$

függvényben az a és b paraméterek meghatározhatók úgy, hogy a φ függvény $2\omega = \omega_1$ periódusú legyen:

$$\varphi(z) = e^{-\frac{\eta z^2}{2\omega} + \frac{\pi i}{2\omega}z} \cdot \sigma(z) = u \cdot \sigma(z) \cdot e^{-\frac{\eta z^2}{2\omega}}.$$

E függvényre — σ tulajdonságaiból következően — teljesülnek a

$$\varphi(z + 2\omega) \equiv \varphi(z);\quad \varphi(z + 2\omega') \equiv -\frac{1}{u^2}\varphi(z)$$

azonosságok. Ezen (egyszer) periodikus egész függvény FOURIER-sorba fejthető, amelynek együtthatói a legutóbbi függvényegyenletek felhasználásával könnyen számíthatók:

$$\varphi(z) \equiv C \cdot i \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot e^{n\frac{2\pi i z}{2\omega}} = C \cdot i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot u^{2n}.$$

Az első thétafüggvény definíciója mármost:

$$\vartheta_1(v) = \vartheta_1\left\{\frac{1}{i\pi}\ln z\right\} = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} u^{2n} =$$

$$= 2\left\{h^{\frac{1}{4}}\sin\pi v - h^{\frac{9}{4}} \cdot \sin 3\pi v + h^{\frac{25}{4}} \cdot \sin 5\pi v - + \ldots\right\};$$

az összefüggés pedig σ és ϑ_1 között egyszerűen:

$$\sigma(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \cdot \frac{2\omega}{\vartheta_1'(0)} \vartheta_1(v) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \cdot \frac{2\omega}{\vartheta_1'(0)} \vartheta_1\left(\frac{z}{2\omega}\right).$$

Célszerű bevezetni a

$$\sigma_1(z) = e^{\eta z} \frac{\sigma(\omega - z)}{\sigma(\omega)}; \quad \sigma_2(z) = e^{(\eta+\eta')z} \cdot \frac{\sigma(\omega + \omega' - z)}{\sigma(\omega + \omega')}; \quad \sigma_3(z) = e^{\eta' z} \cdot \frac{\sigma(\omega' - z)}{\sigma(\omega')}$$

egész függvényeket, amelyekkel a következő elliptikus függvények fejezhetők ki egyszerűen:

$$\wp(z) - e_1 = \left[\frac{\sigma_i(z)}{\sigma(z)}\right]^2; \qquad (i = 1, 2, 3).$$

A $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$ függvényekhez is található a fentiek mintájára egy-egy gyorsan konvergáló sorral rendelkező ϑ függvény, éspedig rendre $\vartheta_2; \vartheta_3; \vartheta_4 = \vartheta_0$; ezek definiáló FOURIER-sora és kapcsolata a megfelelő σ függvénnyel ugyanolyan típusú, mint az imént felírtak:

$$\vartheta_2(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} u^{2n-1} = 2h^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + 2h^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi v + \ldots$$

$$\vartheta_3(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^{n^2} \cdot u^{2n} = 1 + 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v + 2h^9 \cos 6\pi v + \ldots$$

$$[\vartheta_4(v)] = \vartheta_0(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot h^{n^2} \cdot u^{2n} =$$

$$= 1 - 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v - 2h^9 \cos 6\pi v + - \ldots$$

$$\sigma_k(z) = \frac{1}{\vartheta_{k+1}(0)} \cdot e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \cdot \vartheta_{k+1}(v); \qquad (k = 1, 2, 3).$$

A feladatok között mutatjuk meg, hogy a ϑ függvények segítségével hogyan fejezhetők ki, illetve számíthatók numerikusan a lényeges állandócsoportok, illetve függvényértékek.

c) Az elliptikus függvények Jacobi-féle elmélete

Mindenekelőtt a következő megjegyzést bocsátjuk előre: ha az $f(z)$ elliptikus függvény primitív periódusai: ω_1 és ω_2, akkor a $\varphi(z) \equiv f(\alpha z)$ függvény szintén elliptikus függvény, lényegében ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, mint f, de periódusai:

$$\omega_1^* = \frac{\omega_1}{\alpha}; \quad \omega_2^* = \frac{\omega_2}{\alpha}; \qquad \text{viszont} \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_2^*}{\omega_1^*}.$$

Ezt azért volt szükséges előrebocsátani, mert míg a WEIERSTRASS-féle elmélet alapvető függvényében: $\wp$-ben mindkét periódus szabad paraméterként szerepelt — azaz tetszőleges periódus-paralelogrammához megkonstruálhattuk a megfelelő $\wp$ függ-

vényt — addig a JACOBI-féle elmélet alapfüggvényében (pontosabban alapfüggvényeiben) csak egy szabad paraméter: $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega'}{\omega}$ szerepel, azaz tetszőleges periódus-paralelogrammához csak két lépésben határozhatjuk meg az alapfüggvényt: első lépésben ezek τ viszonyának megfelelő elliptikus alapfüggvényt konstruálunk; τ megadása egyértelműen determinálja az alapfüggvény primitív periódusait; a második lépésben azután a független változó homogén lineáris transzformációjával ez utóbbi paralelogrammát beleforgatjuk, resp. nyújtjuk az adott periódus-paralelogrammába.

α) Az alapfüggvények definíciója

A JACOBI-féle elmélet három alapvető szerepet játszó (másodfokú) elliptikus függvénye: a sinus amplitudinis, cosinus amplitudinis, illetve delta amplitudinis függvény (sn z; cn z; dn z) definíciója:

$$\operatorname{sn} z = \frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)} = \frac{1}{\sqrt{\wp(z) - e_3}}; \qquad \operatorname{dn} z = \frac{\sigma_2(z)}{\sigma_3(z)} = \operatorname{sn} z \cdot \sqrt{\wp(z) - e_2}.$$

$$\operatorname{cn} z = \frac{\sigma_1(z)}{\sigma_3(z)} = \operatorname{sn} z \cdot \sqrt{\wp(z) - e_1};$$

Ha ezen egyenletekből $\wp(z)$-t eliminálunk, a

$$\operatorname{cn}^2 z + (e_1 - e_3)\operatorname{sn}^2 z \equiv 1, \qquad \text{illetve} \qquad \operatorname{dn}^2 z + (e_2 - e_3)\operatorname{sn}^2 z \equiv 1$$

egyenlet *adódnék*, ha ω_1 és ω_2 szabadon lenne megválasztható. Azonban csak τ viszonyukat választjuk szabadon, ω_1 *megfelelő* megválasztása révén viszont gondoskodunk arról, hogy (a τ rögzítés után csak ω_1-től függő) $(e_1 - e_3)$ különbség 1 legyen.* Más szóval a definíciós egyenletekben szereplő $\wp(z)$ függvény csak olyan primitív periódus-párra támaszkodhat, amelynél fennáll az

$$e_1 - e_3 = 1$$

egyenlet. Így a következő egyenletek kapcsolják össze a három alapfüggvényt:

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z \equiv 1; \qquad \operatorname{dn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^2 z \equiv 1,$$

ahol $k^2 = e_2 - e_3$; k a JACOBI-féle függvények ún. *modulusa*, k' pedig, amely kielégíti a

$$k^2 + k'^2 = 1$$

egyenletet, ennek *komplementere*. JACOBI az itt definiált elliptikus függvények definíciójában szereplő $\wp$ függvény ω, illetve ω' félperiódusait (amelyek nem feltétlenül félperiódusai a JACOBI-féle elliptikus függvényeknek) K-val és iK'-vel jelölte.

β) A Jacobi-féle elliptikus függvények tulajdonságai

A JACOBI-féle elliptikus függvények valamennyi érdekesebb tulajdonsága az általunk adott definícióra támaszkodva (ez természetesen nem egyezik az eredetivel) a WEIERSTRASS-féle elméletből könnyen származtatható. Ezért ezekkel a feladatok között foglalkozunk; itt csak a leglényegesebbeket emeljük ki.

* Hogy így valóban megválaszthatók — τ rögzítése esetén — a primitív periódusok, azt a feladatok között látni fogjuk; ott egyszersmind konkrét számítási eljárásokat is le fogunk vezetni.

A) A JACOBI-függvények primitív periódusai: az sn z függvény primitív periódusai: 4ω és $2\omega'$; a cn z függvényei: 4ω és $2\omega + 2\omega'$; a dn z függvényei pedig: 2ω és $4\omega'$ nagyságúak.

B) A JACOBI-függvényekre jellemző differenciálegyenletek:

$$\left|\frac{d}{dz}\operatorname{sn} z\right|^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 z)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z);$$

$$\left|\frac{d}{dz}\operatorname{cn} z\right|^2 = (1 - \operatorname{cn}^2 z)(k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 z);$$

$$\left|\frac{d}{dz}\operatorname{dn} z\right|^2 = -(1 - \operatorname{dn}^2 z)(k'^2 - \operatorname{dn}^2 z).$$

C) Az addíciós tételek:

$$\operatorname{sn}(u+v) \equiv \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v};$$

$$\operatorname{cn}(u+v) \equiv \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v};$$

$$\operatorname{dn}(u+v) \equiv \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

γ) A Jacobi- és trigonometrikus függvények kapcsolata

Ha a két primitív periódus által bezárt szögre jellemző $\tau = r + is$ mennyiség úgy tart végtelenhez, hogy r rögzített marad, ugyanakkor $s \to +\infty$, akkor — könnyen beláthatóan — a két primitív periódus egyike: 2ω a π-hez, a másik, $2\omega'$ pedig a végtelenhez tart. E határátmenet alatt az sn $(z; \tau)$; cn $(z; \tau)$; dn $(z; \tau)$ függvények rendre a sin z; cos z, illetve az azonosan 1 függvényhez tartanak. Az előbbiek neve épp innét származik.

ω) Vegyes feladatok

d) Az elliptikus integrálokról

α) Ciklikus primitív függvények és periodikus inverzeik

Tekintsük a

$$w_c(z; z_0) = \int_{z_0(C)}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

függvényt, ahol z_0-t rögzített paraméternek tekintjük. Ha $f(z)$ az egész síkon reguláris, a $w_c(z; z_0)$ függvény egyértelműen meghatározott, és független a C görbétől. Tegyük most fel, hogy vagy

a) $f(z)$ reguláris az egész síkon, egy pontot kivéve, ahol pólusa vagy lényeges szingularitása van; reziduuma e pontban zérustól különböző; vagy

b) $f(z)$ többértékű, de egyes ágai regulárisak az egész síkon, kivéve a z_1 és z_2 pontokat, ahol algebrai — éspedig másodrendű — elágazás van; azaz a z_1 és z_2 pontokat egy bemetszéssel összekötve, az így felhasított síkon f egyértékű, tehát reguláris.

Könnyen belátható, hogy $w_c(z; z_0)$ ez esetben függ az integráció útjától, azaz nincs egyértékű primitív függvény. Ezzel szemben könnyen meg tudjuk adni mindkét esetben w_c összes értékét, ha egyetlen út mentén — pl. a z_0-t és z-t összekötő egyenes mentén (feltételezzük, hogy ez az egyenes nem megy át a szinguláris pontokon) — ismerjük az integrál értékét. Éspedig az *a)* esetben ehhez az értékhez annyiszor kell pozitív, illetve negatív előjellel hozzáadni a reziduum $2\pi i$-szeresét, ahányszor a C görbe (az egyeneshez képest) pozitív, illetve negatív értelemben megkerüli a szinguláris pontot. A *b)* esetben viszont ki kell számítanunk pl. annak a hurokintegrálnak az értékét, amely z_0-ból kiindulva, pozitív értelemben megkerüli z_1-et úgy, hogy a z_1-et és z_2-t összekötő bemetszést pontosan egyszer metszi; nevezzük a következőkben pozitív értelműnek a bemetszésen történő olyan áthaladást, amely ugyanolyan értelmű, mint a fenti hurok mentén vett áthaladás. Mármost w_c összes értékét megkapjuk, ha az egyenes mentén vett integrálhoz annyiszor adjuk hozzá pozitív, illetve negatív előjellel a fentebb kiszámított hurokintegrál értékét, ahányszor a C görbe (az egyeneshez képest) pozitív, illetve negatív értelemben áthalad a bemetszésen.*

Mármost az ilyen esetekben, amikor a $w_c(z; z_0)$ függvény értéke C-től csak annyiban függ, hogy ugyanannak a konstansnak (éspedig *z-től* és *z_0-tól független* konstansnak) az egész számú többszörösei járulnak additíve hozzá az integrál értékéhez, azt szoktuk mondani, hogy $f(z)$-nek *ciklikus* primitív függvénye van. Ugyanis w_c-t végtelen sok értékű függvénynek tekintve, annak mindegyik ága reguláris az egész számsíkon, kivéve $f(z)$ szingularitásait, és bármelyik ágon $\frac{d}{dz} w_c(z; z_0) \equiv f(z)$.

Ha még az egész síkon $f(z) \not\equiv 0$, azaz $\frac{d}{dz} w_c(z; z_0) \not\equiv 0$, akkor $w(z)$ az egész síkon invertálható és inverze (egyértékű) reguláris az egész síkon, kivéve esetleg az f szingularitásainak megfelelő pontokat. Azonnal belátható, hogy ez az inverz függvény szükségképp periodikus (egyszer periodikus), periódusa pedig épp a reziduum $2\pi i$-szerese az *a)* esetben, illetve a hurokintegrállal egyenlő a *b)* esetben.

Hasonlóképp, ha $f(z)$-nek 4 darab algebrai, másodrendű elágazási pontja van, akkor $w_c(z; z_0)$ inverze kettős periódusú függvény. Bizonyos elliptikus függvények inverzeire kell tehát jutnunk, ha az $R[z; P^2(z)]$ típusú függvények integrálját vizsgáljuk, ahol $R(x; y)$ racionális függvény, $P(z)$ pedig harmad- vagy negyedfokú polinom (ti. mindkét esetben négy elágazási pont van, csakhogy az első esetben egyik a végtelenben). Ezek bizonyos alaptípusokra vezethetők vissza; a következőkben épp ezek és az elliptikus függvények kapcsolatát vizsgáljuk.

Megjegyezzük, hogy a periódusokat ez esetben is hurokintegrálok segítségével számíthatjuk.

β) Elliptikus integrálok és normálalakjaik | Az

$$\int R(z; \sqrt{Z})\, dz$$

integrálokat nevezzük elliptikus integráloknak, ahol is $R(x; y)$ az x és y racionális függvényét jelöli, továbbá

$$Z = a_4 \cdot z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0; \qquad |a_3| + |a_4| > 0,$$

* Ez a *b)* esetben csak akkor igaz általában, ha valóban másodrendű elágazás van z_1-ben és z_2-ben.

és a $Z(z)$ polinom valamennyi gyöke különböző.* Mármost $\sqrt{Z}$ páros hatványai racionális (egész) függvények, így $R(z; \sqrt{Z})$ mindig felírható ilyen alakban:

$$R(z; \sqrt{Z}) = \frac{K(z) + \sqrt{Z} \cdot L(z)}{M(z) + \sqrt{Z} \cdot N(z)},$$

majd a számlálót és a nevezőt $M(z) - \sqrt{Z} \cdot N(z)$-vel szorozva:

$$R(z; \sqrt{Z}) = P(z) + \sqrt{Z} \cdot Q(z),$$

ahol is K, L, M, N, P és Q, és a következőkben S is, z-nek racionális függvényei. $P(z)$ elemi eszközökkel integrálható, $Q(z)$ $\sqrt{Z}$-t pedig $\sqrt{\frac{Z}{Z}} = 1$-gyel szorozva, végül is

$$\int \frac{S(z)}{\sqrt{Z}}\, dz$$

alakú integrálra redukálhatjuk az eredetit. Itt $S(z)$ részlettörtekre bontása és a másodfokúnál magasabb fokú szorzók Z deriváltjára történő kiegészítése után** a fennmaradó, elemi eszközökkel nem integrálható integrálok az alábbi 4 típus egyikébe tartoznak:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}; \quad \int \frac{z\, dz}{\sqrt{Z}}; \quad \int \frac{z^2\, dz}{\sqrt{Z}}; \quad \int \frac{dz}{(z-\alpha)\sqrt{Z}}.$$

Ezek közül a harmadikat tovább lehet redukálni; ha ti. Z harmadfokú polinom, akkor közvetlenül, Z deriváltjának felhasználásával, ha viszont negyedfokú, akkor először a $z = z_1 + \frac{1}{t}$ reláció révén — ahol is z_1 valamely gyöke a $Z(z) = 0$ egyenletnek — új változót bevezetve, a gyökjel alatti függvényt harmadfokúra redukáljuk, és ezután

* Ha van legalább két egyenlő gyök, akkor az integrál *pseudo-elliptikus*; ez esetben elemi függvényekkel felírható a primitiv függvény.
Ha Z negyedfokúnál magasabb fokszámú, az integrált *hiperelliptikus*nak nevezzük.

** E célból a következő azonosságokat használjuk fel: Minthogy

$$\frac{d}{dz}[z^m \sqrt{Z}] \equiv \frac{c_0 z^{m+3} + c_1 z^{m+2} + \ldots + c_4 z^{m-1}}{\sqrt{Z}},$$

azért $\int \frac{z^n}{\sqrt{Z}} dz$ kifejezhető az $\int \frac{z^3}{\sqrt{Z}} dz$; $\int \frac{z^2}{\sqrt{Z}} dz$; $\int \frac{z}{\sqrt{Z}} dz$; $\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$ integrálokkal; emellett

$$\frac{d}{dz}\sqrt{Z} \equiv \frac{4a_4 z^3 + 3a_3 z^2 + 2a_2 z + a_1}{\sqrt{Z}},$$

azaz $\int \frac{z^2}{\sqrt{Z}} dz$ is kifejezhető az $\int \frac{z^2}{\sqrt{Z}} dz$; $\int \frac{z}{\sqrt{Z}} dz$; $\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$ integrálokkal. Végül

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\sqrt{Z}}{(z-\alpha)^m}\right] \equiv \frac{d_0(z-\alpha)^3 + d_1(z-\alpha)^2 + \ldots + d_4}{\sqrt{Z} \cdot (z-\alpha)^{m+1}},$$

és így $\int \frac{dz}{(z-\alpha)^n \sqrt{Z}}$ kifejezhető az $\int \frac{dz}{(z-\alpha)\sqrt{Z}}$; $\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$; $\int \frac{(z-\alpha)}{\sqrt{Z}} dz$ és $\int \frac{(z-\alpha)^2}{\sqrt{Z}} dz$ integrálok segítségével.

végezhetjük el az előbb említett átalakítást. Végül is a következő három normálalak — rendre az ún. első, másod-, illetve harmadfajú elliptikus integrál — adódik:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}; \quad \int \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}; \quad \int \frac{dz}{(z-\alpha)\sqrt{Z}},$$

ahol tehát Z harmadfokú polinom. Megjegyezzük, hogy ezen alakok az elliptikus függvények WEIERSTRASS-féle felépítésével hozhatók kapcsolatba, ami különösen az első fajú esetben végezhető el könnyen. A másod- és harmadfajú integrálok viszont a JACOBI-féle felépítés alapján tárgyalhatók egyszerűen.

Ekkor azonban az eredeti elliptikus integrál elemi eszközökkel nem integrálható részeit más alakba kell rendeznünk. Éspedig először is a gyökjel alatti polinomot negyedfokúvá kell alakítanunk (ha eredetileg nem ilyen volt). Ez a lépés a következőképp megy: Legyen a $Z(z) = 0$ egyenlet valamely gyöke: β. Z tehát ilyen alakba írható:

$$Z = (z-\beta)\,(a\,z^2 + b\,z + c).$$

Végezzük el a $\zeta^2 = z - \beta$ helyettesítést; a gyökjel alatt negyedfokú kifejezés marad, éspedig:

$$\Omega^* \equiv A\,\zeta^4 + B\,\zeta^3 + C\,\zeta^2 + D\,\zeta + E.$$

Könnyen belátható, hogy ez mindig átírható ilyen alakba:

$$\Omega^* \equiv \{A_1(\zeta-\gamma)^2 + B_1(\zeta-\delta)^2\}\cdot\{A_2(\zeta-\gamma)^2 + B_2(\zeta-\delta)^2\}.$$

Elvégezve itt a $t = \dfrac{\zeta-\gamma}{\zeta-\delta}$ helyettesítést, végül is a következő integrál alakokra redukálhatjuk a vizsgálatot (a fellépő $\int \dfrac{t\,dt}{\sqrt{(A_1 t^2 + B_1)(A_2 t^2 + B_2)}}$ nem szerepel, mert elemien integrálható):

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(A_1 t^2 + B_1)(A_2 t^2 + B_2)}}; \quad \int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{(A_1 t^2 + B_1)(A_2 t^2 + B_2)}};$$

$$\int \frac{dt}{(1 + C_1 t^2)\sqrt{(A_1 t^2 + B_1)(A_2 t^2 + B_2)}},$$

rendre az első, másod-, illetve harmadfajú elliptikus integrálok, LEGENDRE-alakban. (Meg kell jegyeznünk, hogy ha Ω^* valós együtthatós polinom, akkor — felhasználva, hogy annak gyökei két konjugált párból állanak — a LEGENDRE-féle első, másod-, illetve harmadfajú *normál alakú* elliptikus integrálra:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - ; \quad \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx - ;$$

illetve

$$\int \frac{dx}{(x^2-\nu^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\text{-ra}$$

juthatunk.)

Mármost az első fajú integrált a

$$\sqrt{A_1}\cdot t = \sqrt{B_1}\cdot\frac{\operatorname{cn}(u;k)}{\operatorname{sn}(u;k)}\ ; \qquad k'^2 = \frac{A_1 B_2}{A_2 B_1}$$

helyettesítéssel közvetlenül integrálhatjuk, felhasználva a JACOBI-féle függvényekre jellemző differenciálegyenletet, illetve függvényegyenletet, ti.

$$\int du$$

adódik. Ugyanez a helyettesítés vezet célhoz a másod-, illetve harmadfajú integrálnál is; előbbinél az

$$\int \operatorname{dn}^2 u\, du$$

illetve valamely vele ekvivalens integrál adódik, amely a JACOBI által használt

$$\Theta(u) \equiv \vartheta_4\left(\frac{u}{\vartheta_3^2(0)}\ ;\ \tau\right)$$

függvénnyel könnyen kifejezhető. Ugyanis:

$$\frac{d^2}{du^2}\ln\Theta(u) = \operatorname{dn}^2 u - \frac{E}{K}\ ,$$

ahol E és K (pontosabban is definiált) állandók. A harmadfajú integrálnál a helyettesítés eredménye egy

$$\int \frac{\alpha+\beta\operatorname{sn}^2 u}{1+\mu\operatorname{sn}^2 u}\, du$$

alakú integrál lesz, amely — a μ paraméter — $k^2\operatorname{sn}^2(a;k)$ alakban (itt μ értéke a értékét határozza meg; k-t már az eredeti alak A_1, A_2, B_1, B_2 együtthatói meghatározták!) történő felírása és az összegképletek felhasználása után — könnyen integrálható. Az integrálás eredménye

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)} + u\left\{\frac{d}{du}\ln\Theta(u)\right\}_{u=a} = \frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)} + u\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\ .$$

Megjegyezzük végül, hogy valós együtthatók esetén a LEGENDRE-féle normál alakok az $x = \sin\Phi$ helyettesítés révén a következő alakra hozhatók:

$$F(k;\Phi) = \int_0^{\Phi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\ ;$$

$$E(k;\Phi) = \int_0^{\Phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi;$$

$$H(k;\Phi;\nu) = \int_0^{\Phi}\frac{d\varphi}{(\sin^2\varphi-\nu^2)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Ezen integrálok értéke több helyen részletesen tabellálva van l. JAHNKE—EMDE: Tafeln höherer Funktionen).

γ) További kapcsolatok az elliptikus integrálok és függvények között

Számos, a feladatok között ismertetendő kapcsolat közül csak azt emeljük ki itt, hogy egyrészt a LEGENDRE-féle normál alakokban szereplő k tényező közvetlen kapcsolatban áll az inverz JACOBI-függvények periódusát jellemző τ mennyiséggel, másrészt magukat a primitív periódusokat is meg tudjuk határozni megfelelő hurokintegrálokkal. Ha valós együtthatós polinom szerepelt a kiindulás elliptikus integráljában a gyökjel alatt, akkor ezek a kontúrintegrálok, azaz az inverz függvények primitív periódusai, közvetlenül számíthatóak az ún. teljes elliptikus integrálokból:

$$K(k) = F\left(k;\ \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\ ; \qquad E(k) = E\left(k;\ \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

továbbá $K' = F\left(k';\ \frac{\pi}{2}\right)$ és $E' = E\left(k';\ \frac{\pi}{2}\right)$ játszanak itt nagy szerepet. E mennyiségeket összekapcsolja az ún. LEGENDRE-*reláció*:

$$K\,E' + K'\,E - K\,K' = \frac{\pi}{2}.$$

Megjegyezzük továbbá, hogy $K(k)$ és $K'(k)$ kielégítik az

$$x(x-1)\,y'' + (2x-1)\,y' + \frac{1}{4}\,y = 0$$

differenciálegyenletet, ha a $k^2 = x$ helyettesítéssel élünk.

δ) A LANDEN-féle transzformáció

Numerikus szempontból nagyon előnyös, ha az elliptikus integrál k paraméterét csökkenteni tudjuk. Ezt teszi lehetővé a LANDEN-féle transzformáció, amelyből következő azonosságot általánosságban is kimondjuk, illetve igazoljuk a feladatok között, speciális esete azonban igen könnyen adódik, ha a LEGENDRE-féle normál alakban a

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin 2\varphi}{k_1 + \cos 2\varphi}\ ; \qquad k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'} < k$$

helyettesítést elvégezzük. Így ugyanis az

$$F(k;\ \Phi) \equiv \frac{1 + k_1}{2}\, F(k_1;\ \psi)$$

azonosságra jutunk, amely a numerikus számításoknál előnyösen alkalmazható.

e) Alkalmazások

α) Geometriai alkalmazások

Bizonyos algebrai görbék szerkezetét, továbbá bizonyos görbe vonalú koordináta-rendszerek tulajdonságait jellemezhetjük az elliptikus függvények segítségével.

β) Elektrosztatikai és hidrodinamikai alkalmazások

Az elliptikus függvények segítségével a felső félsíkot, illetve az egységkört leképezhetjük konformisan négyszögekre, illetve a fordított feladatot megoldhatjuk. Ezen alapul számos elektro- és magnetosztatikai, illetve hidrodinamikai alkalmazásuk.

γ) Mechanikai alkalmazások

Néhány olyan mechanikai rendszer adható meg, amelyek jellemző differenciálegyenlete az elliptikus függvények segítségével megoldható. A leginkább közismert példa a matematikai inga példája (tetszőlegesen nagy kilengéseknél).

δ) Műszaki alkalmazások

Ide sorolhatjuk pl. a textiliparban fonógépek ráfonásánál, illetve vetülékcsévelőgépek feltöltésénél a keletkező ballongörbéket, amelyek első fajú LEGENDRE-integrálokkal írhatók le.

Példák és feladatok

a)

β 1. Tekintsük a $w = f(z)$ egész függvényt, amelynek a 2ω mennyiség primitív periódusa.

Bizonyítsuk be, hogy $f(z)$ egyértékű függvénye a

$$\zeta = e^{i\frac{\pi}{\omega}z}$$

változónak, és aszerint a $\zeta = 0$ hely körül LAURENT-sorba fejthető!

Mutassuk meg, hogy $f(z)$ FOURIER-sorának együtthatói hasonló típusú integrálképlet segítségével számíthatók ki, mint a valósban!

Megoldás: Minthogy $f(z)$ a 2ω primitív periódussal rendelkezik, azért z bármely értékénél érvényes az

$$f(z + 2n\omega) \equiv f(z) \qquad (n = \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$$

függvényegyenlet.

Ugyanekkor a

$$\zeta = e^{i\frac{\pi}{\omega}z} = \psi(z)$$

függvény is 2ω primitív periódussal rendelkezik, ami annyit jelent, hogy z_0 bármely értékénél érvényes a

$$\psi(z_0 + 2n\omega) \equiv \psi(z_0) = \zeta_0 \qquad (n = \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$$

függvényegyenlet. És megfordítva is: $\psi(z) = \psi(z_0)$ csak úgy lehetséges, ha $z = z_0 + 2n\omega$. Összefoglalva: ζ bármely ζ_0 értékéhez végtelen sok olyan z_n érték tartozik, amelyek kielégítik a $\zeta_0 = \psi(z_n)$ egyenletet, de ez a végtelen sok érték egyetlen z_0 értékből származtatható a

$$z_n = z_0 + 2n\omega \quad (n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2\ \ldots)$$

reláció szerint. A legelső függvényegyenlet szerint azonban minden ilyen z_n-hez (ti. n értékétől függetlenül) ugyanaz az f függvényérték tartozik, más szóval ζ bármely ζ_0 értékéhez egyetlen

$$\varphi(\zeta_0) = f(z_0) = f(z_n) \qquad (n = \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$$

függvényérték tartozik, azaz az

$$f[z(\zeta)] = \varphi(\zeta)$$

függvény egyértékű.

Bármely origo középpontú körgyűrűben reguláris a $\varphi(\zeta)$ függvény, hiszen f a z-nek az egész síkon, z a ζ-nak bármely origo középpontú körgyűrűben analitikus függvénye, és ezért

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} = \frac{\omega}{\pi i \zeta} \cdot \frac{df}{dz}$$

e körgyűrűben mindenütt létezik. Így $\varphi(b)$ LAURENT-sorba fejthető az origo körül:

$$\varphi(\zeta) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p \zeta^p; \qquad A_p = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \varphi(\zeta) \cdot \zeta^{-(p+1)}\, d\zeta,$$

ahol a C görbe bármely, az origót körülzáró JORDAN-görbe lehet, és a sor az origo kivételével bármely pontban $\varphi(\zeta)$-hez konvergál. Visszahelyettesítve ζ helyébe z-t és C-nek egy origo centrumú kört választva, az

$$f(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p e^{pi\frac{\pi}{\omega}z}; \qquad A_p = \frac{1}{2\omega} \int_0^{2\omega} f(z) \cdot e^{-pi\frac{\pi}{\omega}z}\, dz$$

adódik, tehát az együttható-képzés szabálya lényegében ekvivalens a valós, 2ω periódusú függvényével.

Ha még $e^{pi\frac{\pi}{\omega}z}$-t az általánosított EULER-relációnak megfelelően szétbontjuk, és figyelembe vesszük, hogy bármely origo középpontú, de azt nem tartalmazó zárt körgyűrűben a sor abszolút konvergens és így átrendezhető, az

$$f(z) = A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (A_p + A_{-p}) \cos p\frac{\pi}{\omega} z + i \sum_{p=1}^{\infty} (A_p - A_{-p}) \sin p\frac{\pi}{\omega} z =$$

$$= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ a_p \cos p\frac{\pi}{\omega} z + b_p \sin p\frac{\pi}{\omega} z \right\};$$

$$a_p = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\omega} f(z) \cos p\frac{\pi}{\omega} z\, dz \quad \text{és} \quad b_p = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\omega} f(z) \sin p\frac{\pi}{\omega} z\, dz$$

reláció, illetve egyenletrendszer adódik, teljes analógiában a valós esettel.

2. Határozzuk meg a

$$w = e^{(ez)}$$

egész függvény primitív periódusát, és írjuk fel FOURIER-sorát.

3. Határozzuk meg, hogy mely függvény FOURIER-sorát adja a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot e^{-2n\frac{\pi}{\varrho}z}$$

összeg! Mekkora a kérdéses függvény primitív periódusa?

Útbaigazítás: A

$$\zeta = e^{\frac{2\pi}{\varrho}z}$$

transzformáció révén ζ-t visszahelyettesítve, könnyen megkaphatjuk a $\varphi(\zeta)$ függvényt, majd ebből $f(z)$-t is.

4. Határozzuk meg, hogy mely függvények FOURIER-sorát adjuk meg az alábbiakban:

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2n\frac{\pi}{2}z}}{(n+1)!}; \qquad b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n e^{-n\frac{\pi}{4}z}}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\frac{\pi}{4}z}}{(n-1)!}.$$

γ | 1. Bizonyítsuk be a FOURIER-sorfejtés felhasználásával, hogy az az $f(z)$ *egész* függvény, amelynek két primitív periódusa van: ω_1 és $\omega_2 \left(\operatorname{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0\right)$, csak állandó lehet.

Útbaigazítás: Fejtsük FOURIER-sorba $f(z)$-t mint pl. ω_1 periódusú függvényt. Felhasználva, hogy a kapott sor abszolút, és egyenletesen konvergál bármely véges tartományban, mutassuk meg, hogy $\operatorname{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$ esetben ω_2 csak akkor lehet periódusa a kapott sornak, ha az

$$A_p = 0 \qquad (p = \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$$

egyenletek valamennyien fennállanak (l. a 4. § *a) β)* 1. feladat jelöléseit!).

2. Az $f(z)$ elliptikus függvény primitív periódusai: ω_1 és $\omega_2 \left(\operatorname{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0\right)$. Igazoljuk, hogy a

$$\frac{d}{dz} f(z)$$

függvény is elliptikus, továbbá, hogy ez utóbbi primitív periódusai megegyeznek $f(z)$-évei.

Útbaigazítás: Az állítás első része csaknem triviális. A második rész bizonyítása két lépésben történhet; ti. az is csaknem triviálisan bizonyítható, hogy ω_1 és ω_2 periódusok. Hogy egyszersmind primitív periódusok is, a következőképp igazolható: Tegyük fel, hogy az origo csúcspontú, ω_1 és ω_2 által kifeszített periódus-paralelogramma belsejébe f' továbbá periódus*pontjai* is esnek. Ez esetben ezek és ω_1, ω_2 közül kiválasztható egy ω_3, ω_4 primitív periódus*pár*, azaz az origo csúcspontú, ω_3 és ω_4 által kifeszített periódus-paralelogrammába már nem esik f' további periódus-

pontja. De akkor ω_1 is, ω_2 is egészegyüttható lineárkombinációja lenne ω_3 és ω_4-nek. Könnyen igazolhatjuk ennek alapján, hogy ez esetben f-nek is periódusai lennének ω_3 és ω_4, azaz f-nek is esnének perióduspontjai az origo csúcspontú, ω_1 és ω_2 által kifeszített periódus-paralelogrammába, tehát ω_1 és ω_2 nem lennének f primitív periódusai sem — a feltétellel ellentétben.

3. Legyen $g(z)$ egész függvény, $f(z)$ pedig elliptikus, ω_1 és ω_2 primitív periódusokkal. Elliptikus függvény-e a

$$g[f(z)]$$

közvetett függvény; ha igen, mik a primitív periódusai?

4. Legyen $f(z)$ tetszőleges, $r \geqq 2$-ed fokú elliptikus függvény, jelöljük továbbá $\{z_i(c)\}$-vel $(i = 1, 2, \ldots, k)$ az

$$f(z) - c = 0$$

egyenlet azon megoldásait, amelyek egy tetszőleges periódus-paralelogrammába esnek (multiplicitással, azaz annyiszor leírva az egyes gyököket, amekkora a multiplicitásuk). Igazoljuk, hogy ez esetben érvényes az

$$r = k$$

egyenlőség, éspedig c tetszőleges értéke mellett.

5. Megtartva az előző (4.) feladat jelöléseit, a tekintett periódus-paralelogrammában legyenek $f(z)$ pólushelyei (multiplicitással):

$$p_1;\ p_2;\ \ldots;\ p_r.$$

Igazoljuk, hogy c *tetszőleges* értéke mellett érvényes a

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_r \equiv z_1(c) + z_2(c) + \ldots + z_r(c), \mod (\omega_1;\ \omega_2)$$

kongruencia!

b)

α | 1. Igazoljuk, hogy a

$$\wp(z) \equiv \frac{1}{z^2} + \sum_{m,\,n=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{(z - z_{m,n})^2} - \frac{1}{z_{m,n}^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2}\right]$$

függvény kettős periódusú meromorf függvény, amelynek épp ω_1 és ω_2 a primitív periódusai.

Útbaigazítás: A

$$\wp'(z) \equiv -\frac{2}{z^3} - 2 \sum_{m,\,n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(z - z_{m,n})^3}$$

függvényről ezt a tényt szinte közvetlenül leolvashatjuk. Ebből azonban csak annyi következik, hogy érvényes a

$$\wp(z + z_{m,n}) \equiv \wp(z) + C(m;\ n)$$

azonosság, ahol C független a z-től (megjegyezzük, hogy viszont m-től és n-től nem szükségképp független!). Mármost $\wp$ páros függvény voltát figyelembe véve, a $z = -\frac{1}{2} z_{m,n}$ helyettesítés révén már következik állításunk.

2. A *pe*-függvény origo körüli LAURENT-sorfejtése a definíció szerint szükségképp ilyen alakú:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

Igazoljuk a következő relációkat:

a) $c_1 = c_3 = c_5 = \dots = c_{2n-1} = \dots = 0$

b) $c_0 = 0$

c) $c_2 = 3 \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{z_{m,n}^4}$; $\qquad c_3 = 5 \cdot \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{z_{m,n}^6}$.

3. Igazoljuk — az elliptikus függvények általános elméletére támaszkodva, $\wp$ definíciójából csak annyit véve figyelembe, hogy másodfokú — az

$$e_1 \neq e_2; \quad e_1 \neq e_3; \quad e_2 \neq e_3;$$

relációkat.

Útbaigazítás: Tegyük fel, hogy $e_1 = e_2$. Hány gyöke van ez esetben az origo csúcspontú periódus-paralelogrammában a

$$\wp(z) - e_1 = (\wp(z) - e_2) = 0$$

egyenletnek?

4. Igazoljuk — az elliptikus függvények általános elméletére támaszkodva —, hogy érvényes az

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

egyenlőség.

5. Tekintsük — rögzített, az origo csúcspontú periódus-paralelogrammába eső u és v mellett — az

$$f(z) = \wp^2(z)\ [\wp(u) - \wp(v)] + \wp^2(u)\ [\wp(v) - \wp(z)] + \wp^2(v)\ [\wp(z) - \wp(u)]$$

elliptikus függvényt. Határozzuk meg a fenti paralelogrammába eső gyököket, és igazoljuk, hogy azok mind egyszeresek.

6. Ugyanazon feltételek mellett, mint az előző (5.) feladatban, tekintsük a

$$g(z) = \frac{\wp'(z) - \wp'(u)}{\wp(z) - \wp(u)} - \frac{\wp'(z) - \wp'(v)}{\wp(z) - \wp(v)}$$

elliptikus függvényt. Határozzuk meg gyökeit és pólusait, továbbá azok multiplicitását.

7. Legyen $\wp_1(z)$ olyan WEIERSTRASS-féle $\wp$ függvény, amelynek első primitív periódusa $\frac{1}{n}$-szerese (n természetes egész) $\wp(z)$-énak, második primitív periódusa viszont megegyezik ez utóbbiéval. Igazoljuk, hogy $\wp_1(z)$ előállítható az alábbi módon:

$$\wp_1(z) \equiv \wp(z) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\wp\left(z + k\frac{\omega_1}{n}\right) - \wp\left(k\frac{\omega_1}{n}\right) \right].$$

8. Igazoljuk a következő azonosság érvényességét:

$$\wp'(z) \cdot \gamma'\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right) \cdot \wp'\left(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \cdot \wp'\left(z + \frac{\omega_2}{2}\right) \equiv [4(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)]^2$$

β | 1. Igazoljuk, hogy a $\wp(z)$ függvény kielégíti a

$$\wp''(z) = 6\,\wp^2(z) - \frac{1}{2} g_2$$

differenciálegyenletet.

2. Adjunk meg egy olyan rekurziós képletet, amelynek segítségével a

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2}$$

függvény MACLAURIN sorának együtthatói könnyen származtathatóak.

Útbaigazítás: Az előző (1.) feladatban megadtunk egy a $\wp(z)$ függvényt jellemző differenciálegyenletet. A szükséges két kezdeti feltétel, amely $\wp$-t egyértelműen jellemzi, a

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2} = 3 \cdot z^2 \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{z_{m,n}^4} + 5\,z^4 \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{z_{m,n}^6} + \ldots + c_n\, z^{2n-2} + \ldots$$

sorfejtés első két együtthatójának megadásával megtörtént. A sorfejtésnek a differenciálegyenletbe történő formális helyettesítése az

$$(n-3)\,(2n+1)\,c_n = 3\,(c_2\,c_{n-2} + c_3\,c_{n-3} + \ldots + c_{n-2}\,c_2)$$

rekurziós formulára vezet. A kapott eredmény a permanenciatétel alapján helyesen adja az együtthatókat, azaz nem formális.

3. Igazoljuk az addíciós tétel alábbi alakját:

$$[\wp(u) + \wp(v) + \wp(u+v)]\,[4\wp(u)\,\wp(v)\,\wp(u+v) - g_3] =$$
$$= \left[\wp(u)\,\wp(v) + \wp(u)\,\wp(u+v) + \wp(v)\,\wp(u+v) + \frac{g_2}{4}\right]^2,$$

éspedig az

$$f(z) = f(z;\, a, b) = \wp'(z) + a\,\wp(z) + b$$

függvény felhasználásával, ahol az a és b paraméterek az $f(u) = f(v) = 0$ egyenletrendszert kielégítik.

Megoldás: $f(z;\ a, b)$ harmadfokú elliptikus függvény, amelynek az origo csúcspontú periódus-paralelogrammában a $z = 0$ helyen harmadfokú pólusa van. 3 nullhelye kell hogy legyen tehát ezen periódus-peralelogrammában, amelyek azonnal megállapíthatóan a

$$z = u;\quad z = v \quad \text{és a} \quad z \equiv -(u + v) \mod (\omega_1;\ \omega_2)$$

pontokban vannak, hiszen bármely (oldalélein szingularitást nem tartalmazó !) paralelogrammában a zérushelyek összege egyenlő a pólushelyek összegével, speciálisan tehát az origót (belsejében) tartalmazó periódus-paralelogrammában $3 \cdot 0 = 0$-val. Így a

$$\wp'(z) = -\,[a\,\wp(z) + b\,, \qquad \text{illetve a} \qquad \wp'(z) = a\,\wp(z) + b$$

egyenlet érvényes a $z = u$ és $z = v$, illetve a $z = (u + v)$ pontban (a harmadik egyenletnél figyelembe vettük, hogy $\wp'$ páratlan, $\wp$ viszont páros függvény). A $\wp$ függvény differenciálegyenletében $\wp'$ helyébe a fenti alakot helyettesítve, az

$$x^3 - g_2 x - g_3 - (a x + b)^2 = 0$$

egyenletnek tehát $x = \wp(u)$; $x = \wp(v)$ és $x = \wp(u + v)$ is gyöke. A gyökök és együtthatók között fennálló ismeretes kapcsolatok szerint:

$$\wp(u) + \wp(v) + \wp(u + v) = \frac{a^2}{4}\,;$$

$$\wp(u)\,\wp(v) + \wp(u)\,\wp(u + v) + \wp(v)\,\wp(u + v) = -\frac{a\,b}{2} - \frac{g_2}{4}\,;$$

$$\wp(u)\,\wp(v)\,\wp(u + v) = \frac{b^2}{4} + \frac{g_3}{4}\,.$$

Ezekből azonban a bizonyítandó addiciós képlet az

$$\frac{a^2}{4} \cdot b^2 = \left(-\frac{a\,b}{2^2}\right)^2$$

azonosság helyettesítése révén közvetlenül adódik.

4. Fejezzük ki $\wp(2z)$ értékét egyrészt $\wp(z)$ és $\wp'(z)$, másrészt kizárólag $\wp(z)$ segítségével — azaz adjuk meg a $\wp$ függvény ún. duplikációs tételét!

Útbaigazítás: A

$$\wp(z + \zeta) = -\,\wp(z) - \wp(\zeta) + \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(z) - \wp'(\zeta)}{\wp(z) - \wp(\zeta)}\right]^2$$

formulában a $\zeta \to z$ határátmenet a BERNOULLI—L'HOSPITAL-szabály felhasználásával elvégezhető (z-t ekkor rögzítettnek tekintjük). Így adódik a

$$\wp(2z) = -\,2\,\wp(z) + \frac{1}{4}\left[\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right]^2$$

formula, amelyben $\wp''(z)$, illetve $\wp'(z)$ a jellemző differenciálegyenletek segítségével helyettesíthető:

$$\wp(2z) \equiv \frac{\wp^4(z) + \frac{g_2}{2}\,\wp^2(z) + 2\,g_3\,\wp(z) + \frac{g_2^2}{16}}{4\,\wp^3(z) - g_2\,\wp(z) - g_3}\,.$$

5. Igazoljuk az alábbi két reláció helyességét:

a) $\wp\left(\frac{\omega_1}{4}\right) + \wp\left(\frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega_2}{2}\right) = 2e_1$;

b) $4\wp(2z) \equiv \wp(z) + \wp\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right) + \wp\left(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \wp\left(z + \frac{\omega_2}{2}\right)$.

6. Igazoljuk, hogy érvényesek az alábbi azonosságok:

$$\wp(z_1 + z_2) + \wp(z_1 - z_2) \equiv 2\wp(z_2) - \frac{d^2}{dz^2} \ln [\wp(z_1) - \wp(z)]_{z=z_2};$$

$$\wp(u + v) - \wp(u - v) \equiv - \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \ln [\wp(u) - \wp(v)].$$

Útbaigazítás: Az addíciós tétel eredeti alakjában szereplő tört így alakítható át:

$$\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} = \frac{d}{dz} \ln [\wp(z) - \wp(v)]_{z=u} + \frac{d}{dz} \ln [\wp(u) - \wp(z)]_{z=v}.$$

Ennek az addíciós tételnek a felhasználása szolgáltatja az igazolandó relációkat.

7. Igazoljuk, hogy érvényesek az alábbi függvényegyenletek:

a) $\frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)} \equiv - \frac{\wp'(z_1 + z_2) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1 + z_2) - \wp(z_2)}$.

b) $\wp(2u) - \wp(2v) \equiv - \frac{\wp'(u + v)\, \wp'(u - v)}{[\wp(u + v) - \wp(u - v)]^2}$.

8. Határozzuk meg a következő függvények értékét:

a) $\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} + \frac{\wp''\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right)}{\wp'\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right)} + \frac{\wp''\left(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}{\wp'\left(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)} + \frac{\wp''\left(z + \frac{\omega_2}{2}\right)}{\wp'\left(z + \frac{\omega_2}{2}\right)}$;

b) $\frac{\wp'\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right)}{\wp'(z)} + \left[\frac{\wp\left(\frac{\omega_1}{4}\right) - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}{\wp(z) - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}\right]^2$;

c) $\left[\wp(u) + \wp\left(u + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\right] \cdot \left[\wp\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) + \wp\left(u + \frac{\omega_2}{2}\right)\right] +$

$+ 4\wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \wp(2u) + 4\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$.

d) $\left[\wp(2z) - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right] \wp^2(z) - \left[\wp(z) - \wp\left(\frac{\omega_1}{4}\right)\right]^2 \cdot \left[\wp(z) - \wp\left(\frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega_2}{2}\right)\right]^2$.

9. Rögzített v és w mellett tekintsük a következő elliptikus függvényeket:

$$\Phi(u) = \wp^2(u)\,[\wp(v) - \wp(w)] + \wp^2(v)\,[\wp(w) - \wp(u)] + \wp^2(w)\,[\wp(u) - \wp(v)];$$

$$\psi(u) = \wp'(u)\,[\wp(v) - \wp(w)] + \wp'(v)\,[\wp(w) - \wp(u)] + \wp'(w)\,[\wp(u) - \wp(v)].$$

Igazoljuk, hogy a $\wp(u) - \wp(u + v + w)$ elliptikus függvény ezekkel az alábbi módon fejezhető ki:

$$\wp(u) = \wp(u + v + w) \equiv 2\,\frac{d}{du}\,\frac{\Phi(u)}{\psi(u)}\,.$$

10. Igazoljuk, hogy érvényesek az alábbi azonosságok:

a) $$\wp(2z) \equiv \wp(z) - \frac{1}{4}\,\frac{d^2}{dz^2}\ln \wp'(z).$$

b) $$\wp(u + v) \equiv \wp(u) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right].$$

γ—δ) 1. Igazoljuk, hogy a $\sigma(z)$ függvény kielégíti a

$$\sigma(z + m\,\omega_1 + n\,\omega_2) \equiv (-1)^{m+n+mn}\,e^{(m\eta_1 + n\eta_2)\left(z + \frac{m\omega_1 + n\omega_2}{2}\right)} \cdot \sigma(z)$$

függvényegyenletet!

Megoldás: Jelöljük röviden Ω, illetve η-val az

$$m\,\omega_1 + n\,\omega_2, \quad \text{illetve} \quad m\,\eta_1 + n\,\eta_2$$

egészegyüttható lineárkombinációkat. A $\wp$ függvény periodicitását jellemző függvényegyenlet:

$$\wp(z + \Omega) \equiv \wp(z),$$

amiből integrálással következik, hogy

$$\zeta(z + \Omega) \equiv \zeta(z) + \eta,$$

amely a σ függvény definíciója alapján így is felírható:

$$\frac{d}{dz}\ln \sigma(z)\Big|_{z+\Omega} \equiv \frac{d}{dz}\ln \sigma(z)\Big|_z + \eta.$$

Újabb integrálás az

$$\ln \sigma(z + \Omega) \equiv \ln \sigma(z) + \eta\,z + c\,(m, n),$$

azaz a

$$\sigma(z + \Omega) \equiv e^{c(m,n) + \eta z} \cdot \sigma(z)$$

azonossághoz vezet, ahol a c állandó z-től független, de m-től és n-től természetesen függő állandó. Ezért alkalmazhatjuk a

$$c(m, n) = c^*_{m,n} + \eta\,\frac{\Omega}{2}\,; \qquad e^{c^*_{m,n}} = C_{m,n}$$

átalakításokat (ti. η és Ω is csak m-től és n-től függ; a legutolsó állandójelölésben ki is hangsúlyoztuk, hogy a $C_{m,n}$ integrációs állandó csak a z-től független szükségképp). Ezeket felhasználva,

$$\sigma(z+\Omega) \equiv C_{m,n}\, e^{\eta\left(z+\frac{\Omega}{2}\right)} \cdot \sigma(z)$$

adódik. $C_{m,n}$ értékének kiszámítása céljából végezzük el a $z \to -\frac{\Omega}{2}$ határátmenetet. Így a

$$C_{m,n} = \lim_{z \to -\frac{\Omega}{2}} \frac{\sigma(z+\Omega)}{\sigma(z)}$$

képlet adódik. Ha mármost $\frac{\Omega}{2}$ nem periódus — azaz m és n közül legalább az egyik páratlan —, akkor $\sigma(z)$ páratlan voltára tekintettel a $C_{m,n} = -1$ érték adódik. Ha viszont $\frac{\Omega}{2}$ is periódus, azaz m is, n is páros, akkor helyettesítéssel $\frac{0}{0}$ alak adódnék, lévén $\sigma(\Omega) = 0$. A BERNOULLI—L'HOSPITAL-szabály azonban alkalmazható: $\sigma'\left(\frac{\Omega}{2}\right)$ ugyanis ebben az esetben nem lehet 0, hiszen $\sigma(z)$-nek csak egyszeres gyökei vannak; $\sigma'\left(-\frac{\Omega}{2}\right)$ pedig szintén nem 0; ti. egyenlő $\sigma'\left(\frac{\Omega}{2}\right)$-vel, lévén σ páratlan és így σ' páros függvény. Ez esetben tehát a $C_{m,n} = 1$ adódik. De akkor $C_{m,n} = (-1)^{m+n+mn}$; ti. ez utóbbi exponense akkor és csakis akkor páros, ha m is, n is az. Ezzel azonban a bizonyítandó relációt igazoltuk.

2. Fejezzük ki a σ függvény segítségével az

$$f(z;\, v) = \wp(z) - \wp(v)$$

elliptikus függvényt.

Megoldás: Az f függvénynek rögzített v mellett a $z = 0$ helyen, rögzített z mellett a $v = 0$ helyen kétszeres pólusa van. Emellett rögzített v mellett — mint azt a 4. § *b) α)* rész bevezetőjében láttuk — a $z = v$ és $z = -v$ helyen (illetve a vele kongruens helyeken) egyszeres 0 helye van (kivéve, ha véletlenül $\wp(v) = e_1$). Minthogy pedig a $\sigma(u)$ függvénynek az $u = 0$ helyen (és a σ-t jellemző függvényegyenlet szerint ekkor minden $\Omega = m\omega_1 + n\omega_2$ helyen is) egyszeres 0 helye van, azért a

$$C\, \frac{\sigma(z-v)\cdot\sigma(z+v)}{\sigma^2(z)\cdot\sigma^2(v)}$$

függvény várhatóan előállítja f-et. Hiszen 0 helyei és pólusai — periodikusan! — ugyanott vannak, mint $f(z, v)$ gyökei és pólusai, és ugyanolyan rendűek. A σ függvény jellemző

$$\sigma(z+\Omega) \equiv (-1)^{m+n+mn} \cdot e^{\eta\left(z+\frac{\omega}{2}\right)} \cdot \sigma(z)$$

függvényegyenlete alapján rögtön megállapítható az is, hogy a fenti tört rögzített v mellett z kettős periódusú függvénye, és fordítva, rögzített z mellett ugyanez érvényes

v-re is. Így csak a C értékét kell megállapítanunk, ahol C nem függ sem z-től, sem v-től. E célból pl. az egyenlet mindkét oldalát z^2-tel szorozva $\left[\wp(z) = \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + \ldots\right]$, és a $z \to 0$ határátmenetet elvégezve, az $1 = -C$ érték adódik. Így tehát

$$\wp(z) - \wp(v) \equiv -\frac{\sigma(z+v)\,\sigma(z-v)}{\sigma^2(z)\cdot\sigma^2(v)}\,.$$

3. Igazoljuk az alábbi azonosságot, amely a ζ függvény ún. addíciós tételét adja:

$$\zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta(u) \equiv \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)}\,.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy $\wp'(z)$ így fejezhető ki a σ függvény segítségével:

a) $$\wp'(z) \equiv -\frac{\sigma(2z)}{\sigma^4(z)},$$

illetve

b) $$\wp'(z) \equiv -\frac{\sigma\left(z-\frac{\omega_1}{2}\right)\cdot\sigma\left(z-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\cdot\sigma\left(z-\frac{\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\sigma^3(z)}\,.$$

5. Igazoljuk, hogy a $\wp(z)$ függvény $(2n)$-edik deriváltja kifejezhető mint $\wp(z)$ pontosan n-ed fokú polinomja, éspedig $(2n+1)!$ fő együtthatóval.

6. Tegyük fel, hogy az $f(z)$ és $g(z)$ elliptikus függvények primitív periódusai közösek. Igazoljuk, hogy ez esetben

a) közöttük fennáll egy

$$A(f, g) = 0$$

típusú algebrai egyenlet (azonosság), ahol is A argumentumainak állandó együtthatós polinomja:

b) mindkettő kielégít egy-egy

$$A_1(f; f') \equiv 0, \quad \text{illetve} \quad A_2(g; g') \equiv 0$$

ún. algebrai differenciálegyenletet — ahol is az A_1, illetve A_2 argumentumainak állandó együtthatós polinomja.

7. Igazoljuk a következő függvényegyenletek érvényességét:

a) $$\left[\wp\left(z+\frac{\omega_1}{2}\right) - e_1\right]\wp'(z) \equiv \wp''\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\left[\zeta\left(z+\frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta(z) - \frac{1}{2}\eta_1\right];$$

b) $$\wp(z-u)\,\wp(z-v) \equiv \wp(u-v)\,[\wp(z-u) + \wp(z-v) - \wp(u) - \wp(v)] +$$
$$+ \wp'(u-v)\,[\zeta(z-u) - \zeta(z-v) + \zeta(u) - \zeta(v)] + \wp(u)\,\wp(v).$$

8. Fejezzük ki az

$$f(z) \equiv 3\wp(z)\,[\wp'(z)]^2 - \frac{1}{4}[\wp''(z)]^2$$

elliptikus függvényt a σ függvény segítségével.

9. Igazoljuk a következő azonosságokat:

a) $$\sigma(a+b)\,\sigma(a-b)\,\sigma(c+d)\,\sigma(c-d)+\sigma(a+d)\,\sigma(a-d)\,\sigma(b+c)\,\sigma(b-c)\equiv$$
$$\equiv\sigma(a+c)\,\sigma(a-c)\,\sigma(b+d)\,\sigma(b-d).$$

b) $$\sigma(2z)\equiv 2\,\frac{\sigma(z)\,\sigma\left(z-\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(z-\frac{\omega_2}{2}\right)\sigma\left(z+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}$$

c) $$\begin{vmatrix}1 & \wp(u) & \wp'(u)\\ 1 & \wp(v) & \wp'(v)\\ 1 & \wp(w) & \wp'(w)\end{vmatrix}\equiv 2\,\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(v-w)\,\sigma(w-u)\,\sigma(u+v+w)}{\sigma^3(u)\,\sigma^3(v)\,\sigma^3(w)};$$

d) $$\begin{vmatrix}1 & \wp(a) & \wp^2(a) & \wp'(a)\\ 1 & \wp(b) & \wp^2(b) & \wp'(b)\\ 1 & \wp(c) & \wp^2(c) & \wp'(c)\\ 1 & \wp(d) & \wp^2(d) & \wp'(d)\end{vmatrix}\equiv$$

$$\equiv 2\,\frac{\sigma(a-b)\,\sigma(a-c)\,\sigma(a-d)\,\sigma(b-c)\,\sigma(b-d)\,\sigma(c-d)\,\sigma(a+b+c+d)}{\sigma^4(a)\cdot\sigma^4(b)\cdot\sigma^4(c)\cdot\sigma^4(d)}.$$

10. Igazoljuk, hogy az $x+y+z\equiv 0$ feltétel mellett érvényes a

$$[\zeta(x)+\zeta(y)+\zeta(z)]^2\equiv\wp(x)+\wp(y)+\wp(z)$$

azonosság.

11. Bizonyítsuk be a következő függvényegyenletek érvényességét:

a) $$\frac{\wp'(z)-\wp'(v)}{\wp(z)-\wp(v)}-\frac{\wp'(z)-\wp'(v)}{\wp(z)-\wp(w)}\equiv 2\,\frac{\sigma(z)\,\sigma(z+v+w)\,\sigma(v-w)}{\sigma(z+v)\,\sigma(z+w)\,\sigma(v)\,\sigma(w)}.$$

b) $$2\zeta(2z)\equiv\zeta(z)+\zeta\left(z-\frac{\omega_1}{2}\right)+\zeta\left(z+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)+\zeta\left(z-\frac{\omega_2}{2}\right).$$

c) $$2\begin{vmatrix}1 & \wp(u) & \wp^2(u)\\ 1 & \wp(v) & \wp^2(v)\\ 1 & \wp(w) & \wp^2(w)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & \wp(u) & \wp'(u)\\ 1 & \wp(v) & \wp'(v)\\ 1 & \wp(w) & \wp'(w)\end{vmatrix}\equiv\zeta(u+v+w)-\zeta(u)-\zeta(v)-\zeta(w).$$

d) $$\zeta(u-v)-\zeta(u-w)-\zeta(v-w)+\zeta(2v-2w)\equiv$$
$$\equiv\frac{\sigma(u-2v+w)\,\sigma(u+v-2w)}{\sigma(2w-2v)\,\sigma(u-v)\,\sigma(u-w)}.$$

ε | 1. Igazoljuk, hogy a

$$\varphi(z) = e^{-\frac{\eta z^2}{2\omega} + \frac{\pi i}{2\omega}} \cdot \sigma(z) = \frac{2\omega}{\vartheta_1'(0)} \cdot \vartheta_1(v) \cdot u$$

egész függvény (egyszer) periodikus; periódusa: 2ω. Vizsgáljuk meg, hogy a $2\omega'$ periódust illetően kváziperiodikus-e a függvény, s ha igen, mi a kváziperiodicitásra jellemző függvényegyenlet! Fejtsük Fourier-sorba az adott periodikus egész függvényt, és vizsgáljuk meg, hogy e sor milyen periódus-paralelogrammában konvergál a legjobban!

Hogyan számítható a $\varphi(z)$, illetve a $\sigma(z)$ függvényérték legegyszerűbben egy tetszőleges z_0 pontban?

A felhasznált, illetve felhasználandó jelölések: ω_1 és ω_2 a σ-függvény konstrukciójában szereplő (kvázi)periódusok, $\operatorname{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$,

$$\omega = \frac{\omega_1}{2}; \quad \omega' = \frac{\omega_2}{2}; \quad \eta = \frac{1}{2}\eta_1 = \zeta\left|\frac{\omega_1}{2}\right|; \quad \eta' = \frac{1}{2}\eta_2 = \zeta(\omega'); \quad \tau = \frac{\omega'}{\omega};$$

$$h = e^{i\pi\tau}; \quad v = \frac{z}{2\omega}; \quad u = e^{i\pi v} = e^{i\frac{\pi}{2\omega}z}.$$

Megoldás: a) $\varphi(z)$ valóban 2ω periódusú. Ugyanis:

$$\varphi(z+2\omega) = e^{\frac{-\eta(z+2\omega)^2}{2\omega} + \frac{\pi i\,(z+2\omega)}{2\omega}} \cdot \sigma(z+2\omega) =$$

$$= e^{-\frac{\eta z^2}{2\omega} + \frac{\pi i}{2\omega}z} \cdot e^{-2\eta z} \cdot e^{-2\omega\eta} \cdot e^{i\pi} \cdot \sigma(z) \cdot (-1)^1 \cdot e^{\eta_1 z} \cdot e^{\frac{\omega_1\eta_1}{2}} =$$

$$= e^{-\frac{\eta z^2}{2\omega} + \frac{\pi i}{2\omega}} \cdot \sigma(z) \equiv \varphi(z).$$

Hogy $\varphi(z)$ egész függvény, az azonnal leolvasható.

b) $\varphi(z)$ valóban kváziperiodikus $2\omega' = \omega_2$ (kvázi)periódussal. Ugyanis

$$\varphi(z+2\omega') = e^{-\frac{\eta z^2}{2\omega} + \frac{\pi i}{2\omega}z} \cdot e^{-2\eta z\frac{\omega'}{\omega}} \cdot e^{-2\eta\frac{\eta'^2}{\omega}} \cdot e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}} \cdot \sigma(z) \cdot (-1)^1 \cdot e^{\eta_2 z} \cdot e^{\frac{\omega_2\eta_2}{2}} =$$

$$= -\varphi(z) \cdot e^{-2z\left(\frac{\omega'}{\omega}\eta - \eta'\right)} \cdot e^{-2\omega'\left(\eta\frac{\omega'}{\omega} - \eta'\right)} \cdot e^{i\pi\tau}$$

A ζ függvénynek egy periódus-paralelogramma kerületén vett integrálja az η és ω mennyiségek között az

$$\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = 2\pi i, \quad \text{azaz} \quad \omega\eta' - \omega'\eta = \frac{\pi i}{2}$$

relációt adja, amelyet az előző képletben jól felhasználhatunk. Így adódik a

$$\varphi(z+2\omega') \equiv -\varphi(z) \cdot e^{-\frac{i\pi}{\omega}z} = -\frac{1}{u^2}\varphi(z)$$

reláció, ami a φ függvény kváziperiodicitását fejezi ki; általában:

$$\varphi(z+2n\omega') \equiv (-1)^n \cdot \varphi(z) \cdot e^{-\frac{i\pi z}{\omega} n - i\pi\tau n(n-1)} = (-1)^n \cdot \varphi(z) \cdot \frac{1}{u^{2n} h^{n(n-1)}},$$

a kváziperiodicitást jellemző függvényegyenlet.

c) $\varphi(z)$ FOURIER-sora ilyen alakú:

$$\varphi(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\pi i n \frac{z}{\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n u^{2n}.$$

Az A_n együtthatókra könnyen adhatunk rekurziós képletet, ha figyelembe vesszük a φ-t jellemző, a kváziperiodicitást kifejező függvényegyenletet:

$$\varphi(z+2\omega') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{\frac{\pi i z}{\omega} n} \cdot e^{2n\pi i\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot h^{2n} \cdot e^{\pi i \frac{z}{\omega}};$$

$$= -e^{-\frac{i\pi z}{\omega}} \varphi(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\pi i \frac{z}{\omega}(n-1)} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n+1} e^{\pi i n \frac{z}{\omega}},$$

amiből az

$$A_n h^{2n} = -A_{n+1}, \qquad \text{azaz} \qquad A_n h^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(n-\frac{1}{2}\right)^2} = -A_{n+1},$$

vagy átrendezve a

$$(-1)^{n+1} h^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot A_{n+1} = (-1)^n h^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot A_n$$

rekurziós formula adódik. Minthogy itt a bal és a jobb oldal csak annyiban tér el egymástól, hogy az $n+1$ index helyébe a jobb oldalon n került, azért e rekurziós formula úgy is leolvasható, hogy a

$$(-1)^n h^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot A_n$$

kifejezés n minden értékére ugyanaz az érték — azaz egy n-től független $C \cdot i$ állandóval egyenlő — amiből

$$A_n = C \cdot i \cdot (-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}$$

adódik. Így a $\vartheta_1(v)$ függvény felhasználásával:

$$\varphi(z) \equiv C \cdot i \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2\omega}z} = C \cdot i \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} u^{2n} =$$

$$= C \cdot u \cdot \vartheta_1(v).$$

Mármost C meghatározása céljából mindkét oldalon $z = 2\omega v$-vel osztunk, és elvégezzük a $z \to 0$, azaz $v \to 0$ határátmenetet. Minthogy pedig a L'HOSPITAL-szabály szerint

$$\lim_{v\to 0} \frac{\vartheta_1(v)}{v} = \vartheta_1'(0); \qquad \lim_{z\to 0} \frac{\sigma(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \prod_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \left[\left(1 - \frac{z}{z_{m,n}}\right) e^{\frac{z}{z_{m,n}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_{m,n}}\right)^2}\right] = 1,$$

azért a $C = \frac{2\omega}{\vartheta_1'(0)}$ érték adódik. Végül tehát

$$\sigma(z) \cdot u \cdot e^{-\frac{\eta z^2}{2\omega}} \equiv \varphi(z) = u \frac{2\omega}{\vartheta_1'(0)} \vartheta_1(v); \qquad v = \frac{z}{2\omega}; \qquad u = e^{i\frac{\pi}{2\omega}z}.$$

d) A z-beli 2ω valódi és $2\omega'$ kváziperiódusnak a v-beli 1 valódi és τ kváziperiódus felel meg. Ezek adottak lévén, h is adott, és abszolút értékben egynél kisebb, mint azt a bevezetésben említettük. Így a $\vartheta_1(v)$ sor mindig konvergál, leggyorsabban természetesen $v = 0$-ban; a legkönnyebben tehát $\vartheta_1(v)$ — ezen keresztül $\varphi(z)$, illetve $\sigma(z)$ — értékét is olyan periódus-paralelogrammában számíthatjuk ki, amelynek centruma az origo, szögpontjai tehát: $\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\tau}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{2}\right)$. Bármely más periódus-paralelogrammában ϑ_1 értékét úgy számíthatjuk, hogy felhasználjuk az 1 nagyságú periódusra vonatkozó periodicitását, illetve a τ nagyságúra vonatkozó kváziperiodicitását. A kváziperiodicitásra jellemző függvényegyenletet $\varphi(z)$-ből közvetlenül megkaphatjuk:

$$\vartheta_1(v+\tau) \equiv -\vartheta_1(v) \cdot \frac{1}{h u^2} \equiv -\vartheta_1(v)\, e^{-(i\pi\tau + 2\pi i v)}.$$

Ezek alapján tehát bármely z pontban úgy számíthatjuk $\varphi(z)$, illetve $\sigma(z)$ értékét, hogy meghatározzuk a megfelelő $v = \frac{z}{2\omega}$ értéket, ezt az 1 és τ periódusok segítségével egy, az origo centrumú paralelogrammában fekvő v_0 pontba redukáljuk, itt kiszámítjuk a sorfejtés segítségével $\vartheta_1(v_0)$ értékét, ezután a periodicitás, illetve a kváziperiodicitásra jellemző függvényegyenlet segítségével $\vartheta_1(v)$ értékét, majd ebből $\varphi(z)$-t, illetve a

$$\sigma(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \cdot \frac{2\omega}{\vartheta_1'(0)} \cdot \vartheta_1(v)$$

képlet alapján $\sigma(z)$ értékét.

2. Állítsuk össze tabellárisan az egyes ϑ függvények által felvett értékeket a $v+\frac{1}{2}$; $v+\frac{\tau}{2}$; $v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$; $v+1$; $v+\tau$; $v+1+\tau$ helyeken — a $\vartheta_i(v)$ értékek felhasználásával $(i = 1, 2, 3;\ 4 = 0)$.

3. Fejezzük ki a $\sqrt{e_i - e_k}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ értékeket a ϑ függvények segítségével.

Megoldás: A $\sigma_1(z)$ függvények definíciójából indulhatunk ki, és először igazoljuk a bevezetésben említett

$$\wp(z) - e_i = \left[\frac{\sigma_i(z)}{\sigma(z)}\right]^2 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

relációkat. Igazoltuk a 3. § *b)* feladatban a

$$\wp(z) - \wp(z') = -\frac{\sigma(z+z')\,\sigma(z-z')}{\sigma^2(z)\,\sigma^2(z')}$$

relációt. Ha speciálisan z' egy félperiódus, illetve a két félperiódus összege (jelöljük ezt így: $z' = \omega^*$), akkor

$$\wp(z) - \wp(\omega^*) = -\frac{\sigma(z+\omega^*)\,\sigma(z-\omega^*)}{\sigma^2(z)\cdot\sigma^2(\omega^*)}\,.$$

Figyelembe véve mármost σ páratlan voltát, továbbá a

$$\sigma(t+2\omega^*) \equiv -e^{2\eta^*(t+\omega^*)}\cdot\sigma(t)$$

azonosságot, melyből a $t = z - \omega^*$ helyettesítéssel a

$$\sigma(z+\omega^*) \equiv -e^{-2\eta^* z}\cdot\sigma(z-\omega^*)$$

reláció adódik, így alakul a fenti egyenlőség:

$$\wp(z) - \wp(\omega^*) \equiv \left[\frac{e^{\eta^* z}\cdot\sigma(\omega^*-z)}{\sigma(z)\cdot\sigma(\omega^*)}\right]^2.$$

Minthogy pedig $\wp(\omega^*) = e_1$, e_2 vagy e_3 attól függően, hogy $\omega^* = \frac{\omega_1}{2}$; $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ vagy $\frac{\omega_2}{2}$; megkapjuk a kívánt relációkat. Figyelembe véve még a σ_i és ϑ_i függvények összefüggéseit, végül is a

$$\sqrt{\wp(z)-e_i} = \frac{1}{2\omega}\,\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_{i+1}(0)}\cdot\frac{\vartheta_{i+1}(v)}{\vartheta_1(v)} \qquad (i=1,2,3)$$

reláció adódik. Ha most itt még a $z = \omega$; $\omega+\omega'$ vagy ω', azaz a $v = \frac{1}{2}$; $\frac{1+\tau}{2}$, illetve $\frac{\tau}{2}$ helyettesítést is elvégezzük, és figyelembe vesszük az előző (2.) feladatban elkészített táblázatot, amely szerint az egyes ϑ_i függvények félperiódusbeli értékei egy másik ϑ függvény 0-beli értékével kifejezhetőek, a

$$\sqrt{e_1-e_2} = \frac{1}{2\omega}\,\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_3(0)}\cdot\frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_2(0)}\,; \qquad \sqrt{e_1-e_3} = \frac{1}{2\omega}\,\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_4(0)}\,\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\,;$$

$$\sqrt{e_2-e_3} = \frac{1}{2\omega}\,\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_4(0)}\cdot\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}$$

kifejezések adódnak.

4. Igazoljuk a fontos

$$\vartheta_1'(0) = \pi\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)$$

relációt!

5. Igazoljuk, hogy a ϑ_1; ϑ_2; ϑ_3, illetve ϑ_4 függvényeknek egy kváziperiódus-paralelogrammában (pl. a 0; 1; $1+\tau$; τ szögpontúban) csak egy-egy egyszeres 0 helyük van, és adjuk meg e helyet.

6. Az előző (5.) feladatra támaszkodva igazoljuk, hogy bármely elliptikus függvény felírható a ϑ függvények racionális törtkifejezése alakjában, és adjuk meg speciálisan a $\wp(z)$ függvény kifejezését.

7. Igazoljuk, hogy a τ kváziperiódusú $\vartheta_l(v;\tau)$ függvények kielégítik a

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2} \equiv 4\pi i \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}$$

differenciálegyenletet.

c)

α 1. Fejezzük ki a JACOBI-féle elliptikus függvényeket a ϑ függvények segítségével.

2. Adjuk meg a JACOBI-féle elliptikus függvények paramétereinek: az ω és a τ, továbbá a k és a τ mennyiségek — azaz az első félperiódus és a periódusviszony, továbbá a modulus és a periódusviszony — kapcsolatát a ϑ függvények segítségével.

Megoldás: ω és τ értékét az $e_1 - e_3 = 1$ követelmény kapcsolja össze. Márpedig az $e_1 - e_3$ különbséget a ϑ függvények segítségével kifejeztük a 4. § *b) ε)* 3. feladatban:

$$e_1 - e_3 = \left(\frac{1}{2\omega}\right)^2 \cdot \left[\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_4(0)} \cdot \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\right]^2 = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \vartheta_3^4(0),$$

ahol felhasználtuk a 4. § *b) ε)* 4. feladatban igazolt $\vartheta_1'(0) = \pi\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)$ relációt is. A ϑ függvények szereplő 0-beli értékei a $h = e^{i\pi\tau}$ mennyiség segítségével — a sorfejtésekre támaszkodva — kifejezhetőek. Az $e_1 - e_3 = 1$ követelményt figyelembe véve, a következő kifejezést kapjuk ω és τ összefüggésére:

$$\omega = \frac{\pi}{2}[1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \ldots]^2; \qquad (h = e^{i\pi\tau}).$$

k és τ kapcsolatát viszont az $e_2 - e_3 = k^2$ definíció alapján számíthatjuk. Ugyanis a

$$\sqrt{e_2 - e_3} = k = \frac{1}{2\omega}\,\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_4(0)} \cdot \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)}$$

egyenlet felhasználásával a

$$k = \left[\frac{2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + 2h^{\frac{25}{4}} + \ldots}{1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \ldots}\right]^2 \qquad (h = e^{i\pi\tau})$$

reláció adódik.

3. Igazoljuk, hogy a JACOBI-féle elliptikus függvények a következő alakban is előállíthatók: $\left(v = \frac{z}{2\omega}\right)$

$$\operatorname{sn} z = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}; \qquad \operatorname{cn} z = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}; \qquad \operatorname{dn} z = \sqrt{k'}\,\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)}$$

és határozzuk meg ennek alapján a kérdéses függvények zérushelyeit és pólusait, továbbá periódusait.

4. Az előző (3.) feladatra támaszkodva, készítsünk táblázatot arról, hogyan lehet az egyes JACOBI-függvények z_0-beli értékeire támaszkodva, a $z_0 + m\omega + n\omega'$ $(m, n = 0, 1, 2)$ pontbeli értékeiket kiszámítani.

5. A $\tau = \dfrac{\omega'}{\omega}$ periódusviszony legyen (tiszta) képzetes mennyiség: $\tau = ir$, ahol r valós pozitív számot jelöl. Igazoljuk, hogy ez esetben

a) ω (pozitív) valós, ω' pedig (tiszta) képzetes mennyiség.

b) A JACOBI-függvények modulusa: k valós szám.

c) $|k| < 1$, és így k', a komplementer-modulus is valós.

d) $\mathrm{sn}\,(z, \tau)$; $\mathrm{cn}\,(z; \tau)$ és $\mathrm{dn}\,(z; \tau)$ valós értékeket vesznek fel a valós tengely mentén.

6. Igazoljuk — az előző (5.) feladatra támaszkodva —, hogy abban az esetben, amikor a modulus: k valós, és abszolút értékben egynél kisebb, a JACOBI-függvények elméletében szereplő ω mennyiség (pozitív) valós, ω' és τ pedig (tiszta) képzetes mennyiségek.

7. Fejezzük ki a $\wp(z)$ WEIERSTRASS-féle elliptikus függvényt az sn függvény segítségével.

Megoldás: $\wp(z) = \wp(z; \omega_1; \omega_2)$ félperiódusait ω és ω'-vel, viszonyukat pedig τ-val jelölve, τ — mint ezt a bevezetésben említettük — meghatározza azon $\tilde{\omega}$ és $\tilde{\omega}'$ félperiódusokat, amelyek az $\mathrm{sn}\,(z) = \mathrm{sn}\,(z; \tau)$ függvény definíciójában szereplő $\wp$ függvényt jellemzik; mint láttuk, magának az $\mathrm{sn}\,(z; \tau)$ függvénynek a félperiódusai ez esetben $2\tilde{\omega}$-vel, illetve $\tilde{\omega}'$-vel egyenlőek. Ugyancsak a bevezetésben említettük, hogy adott perióduspárral rendelkező függvényt általában csak $\mathrm{sn}\,(\lambda z; \tau)$ típusú függvénnyel tudunk felépíteni, ahol

$$\lambda = \frac{\tilde{\omega}}{\omega} = \frac{\tilde{\omega}'}{\omega'}; \quad \left|\tau = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} = \frac{\omega'}{\omega}\right|.$$

Könnyen belátható, hogy $\wp(z)$-t ilyen alakú függvénnyel kell előállítanunk:

$$\wp(z) \equiv \frac{C_1}{\mathrm{sn}^2\,(\lambda z)} + C_2.$$

Ugyanis $\mathrm{sn}\,z$-nek egyszeres zérushelye van az origoban, a felírt — szükségképp elliptikus — függvénynek tehát ott valóban másodrendű pólusa van, és a primitív periódusok megegyeznek. Ez utóbbi állítás így látható be: Az $\mathrm{sn}\,(z)$ függvény primitív periódusai: $4\tilde{\omega}$ és $2\tilde{\omega}'$, azaz $\mathrm{sn}\,(\lambda z)$ primitív periódusai: 4ω és $2\tilde{\omega}'$. Négyzetre emelésnél azonban az első periódus feleződik (a második viszont nem); a 4. § *c) α)* 4. feladatban összeállított táblázat szerint ugyanis:

$$\mathrm{sn}\,(z_0 + 2\tilde{\omega}) \equiv -\,\mathrm{sn}\,(z_0), \qquad \text{és így} \qquad \mathrm{sn}^2\,(z_0 + 2\tilde{\omega}) \equiv \mathrm{sn}^2\,(z_0);$$

$$\mathrm{sn}\,(z_0 + 1\tilde{\omega}') \equiv \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\mathrm{sn}\,(z_0)}, \qquad \text{és így} \qquad \mathrm{sn}^2\,(z_0 + 1 \cdot \tilde{\omega}') \equiv \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{sn}^2\,(z_0)} \not\equiv \mathrm{sn}^2\,(z_0).$$

Az $\mathrm{sn}^2\,(\lambda z)$, azaz az $\mathrm{sn}^{-2}\,(\lambda z)$ függvény primitív periódusai tehát valóban: 2ω és $2\omega'$.

Mármost a C_1 állandót az a követelmény szabja meg, hogy $C_1 \cdot \mathrm{sn}^{-2}(\lambda z)$ origo körüli LAURENT-sorának az $\frac{1}{z^2}$ taggal kell kezdődnie. Minthogy pedig

$$\mathrm{sn}\, u = u + c_3 u^3 + \ldots$$

alakú sorba fejthető, ami definíciójából közvetlenül leolvasható, azért $C_1 = \lambda^2$ adódik. A C_2 értéket a $z = \omega$ helyettesítéssel számíthatjuk:

$$\wp(\omega) = e_1; \qquad \mathrm{sn}\,(\lambda\,\omega) = \mathrm{sn}\,\tilde{\omega} = \frac{\mathrm{cn}\,(0)}{\mathrm{dn}(0)} = \frac{1}{1} = 1,$$

azaz $C_2 = e_1 - \lambda^2$.

λ értékét pedig a következő egyenletpár felhasználásával fejezhetjük ki az e_i mennyiségek segítségével: láttuk a 4. § *c) α)* 2. feladatban, hogy

$$e_1 - e_3 = \left|\frac{\pi}{2\omega}\right|^2 \vartheta_3^4(0)$$

A 4. § *c) α)* 2. feladatban emellett τ és $\tilde{\omega}$ összefüggésének megállapításánál a

$$2\tilde{\omega} = \pi\, \vartheta_3^2(0)$$

egyenlőség adódott. Ezek alapján

$$\lambda = \frac{\tilde{\omega}}{\omega} = \sqrt{e_1 - e_3}$$

Végül tehát

$$\wp(z) \equiv \frac{e_1 - e_3}{\mathrm{sn}^2\,(z\sqrt{e_1 - e_3};\ \tau)} + e_3.$$

8. Állítsuk elő a

$$\wp'(z) \qquad \text{és} \qquad \wp'^2(z)$$

elliptikus függvényeket a JACOBI-féle függvények segítségével.

9. A 7. feladatra támaszkodva igazoljuk a

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

relációt.

β) 1. Igazoljuk, hogy a JACOBI-féle elliptikus függvények kielégítik a következő differenciálegyenleteket:

$$\frac{d}{dz}\,\mathrm{sn}\,(z;\ k) = \mathrm{cn}\,(z;\ k) \cdot \mathrm{dn}\,(z;\ k); \qquad \frac{d}{dz}\,\mathrm{cn}\, z = -\,\mathrm{sn}\, z \cdot \mathrm{dn}\, z;$$

$$\frac{d}{dz}\,\mathrm{dn}\, z = -\,k^2\,\mathrm{sn}\, z\,\mathrm{cn}\, z.$$

Útbaigazítás: A definíciók és az ismert

$$\wp'(z) = \pm 2\sqrt{\wp(z) - e_1} \cdot \sqrt{\wp(z) - e_2} \cdot \sqrt{\wp(z) - e_3}$$

reláció felhasználásával igen egyszerű az egyenletek igazolása.

2. Igazoljuk a következő relációt:

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sn}(z) \equiv k'^2 \frac{\operatorname{sn}(z+K)}{\operatorname{dn}^2(z+K)}.$$

3. Határozzuk meg az $\operatorname{sn}(z; k)$, illetve $\operatorname{cn} z$ és $\operatorname{dn} z$ függvények MacLaurin-sorának ötödfokú szeletét.

4. Állapítsuk meg a következő határértékeket:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\operatorname{sn}^2 z}{1-\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}; \qquad \lim_{z\to\infty} \frac{z-\operatorname{sn} z}{z^3}; \qquad \lim_{z\to 0} \frac{z \operatorname{dn} z - \operatorname{sn} z}{z^2 \operatorname{sn} z}.$$

5. Igazoljuk, hogy érvényesek a következő azonosságok:

$$\operatorname{sn}(iz; k') \equiv i \frac{\operatorname{sn}(z; k)}{\operatorname{cn}(z; k)}; \qquad \operatorname{dn}(iz; k') \equiv \frac{\operatorname{dn}(z; k)}{\operatorname{cn}(z; k)};$$

$$\operatorname{cn}(iz; k') \equiv \frac{1}{\operatorname{cn}(z; k)}; \qquad \frac{1}{\operatorname{sn}^2(iz; k')} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(z; k)} \equiv 1.$$

Útbaigazítás: Nézzük át figyelmesen a 4. § c) α) 7., 9. feladatok megoldását.

6. Igazoljuk a következő képleteket:

$$\operatorname{sn}^2 z \equiv \frac{1-\operatorname{cn} 2z}{1+\operatorname{dn} 2z} \equiv \frac{1}{k^2}\frac{1-\operatorname{dn} 2z}{1+\operatorname{cn} 2z};$$

$$\operatorname{cn}^2 z \equiv \frac{\operatorname{dn} 2z + \operatorname{cn} 2z}{1+\operatorname{dn} 2z} \equiv \frac{k'^2}{k^2}\cdot\frac{1-\operatorname{dn} 2z}{\operatorname{dn} 2z - \operatorname{cn} 2z};$$

$$\operatorname{dn}^2 z \equiv \frac{\operatorname{dn} 2z + \operatorname{cn} 2z}{1+\operatorname{cn} 2z} \equiv k'^2 \frac{1-\operatorname{cn} 2z}{\operatorname{dn} 2z - \operatorname{cn} 2z}.$$

7. Igazoljuk a

$$\frac{d}{dz}[\operatorname{sn} z \cdot \operatorname{sn}(z+K)] \equiv \frac{1}{k^2}[\operatorname{dn}^2 z - \operatorname{dn}^2(z+K)]$$

relációt.

8. Határozzuk meg a $\operatorname{dn} z$ elliptikus függvény (egyik) primitív függvényét.

Megoldás: Az $\operatorname{sn} z = \sin\Phi$ helyettesítést elvégezve, és figyelembe véve, hogy

$$\operatorname{cn} z = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z} = \cos\Phi; \qquad \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z\, dz = \cos\Phi\, d\Phi; \qquad \operatorname{dn} z\, dz = d\Phi$$

a következő képlet adódik

$$\int \operatorname{dn} z\, dz = \int d\Phi = \Phi = \arcsin \operatorname{sn} z.$$

9. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét:

$$a) \int \operatorname{sn} z\, dz; \qquad b) \int \frac{\operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z} dz; \qquad c) \int \frac{dz}{\operatorname{dn} z};$$

$$d) \int \operatorname{cn} z\, dz; \qquad e) \int \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z} dz; \qquad f) \int \frac{\operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z} dz; \qquad g) \int \frac{\operatorname{dn} z}{1+\operatorname{cn} z} dz.$$

10. Igazoljuk, hogy az alább következő (primitív) függvények — additív állandótól természetesen eltekintve — egymással egyenlőek:

$$u - k^2 \int \mathrm{sn}^2 u\, du; \qquad \int \mathrm{du}^2 u\, du; \qquad k'^2 u + k^2 \int \mathrm{cn}^2 u\, du;$$

$$u - \mathrm{dn}\, u \cdot \frac{\mathrm{cn}\, u}{\mathrm{sn}\, u} - \int \frac{du}{\mathrm{sn}^2 u}; \qquad k'^2 u + \mathrm{dn}\, u \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{cn}\, u} - k'^2 \int \frac{du}{\mathrm{cn}^2 u}.$$

11. Bizonyítsuk be a következő azonosságok érvényességét:

a) $$\frac{\mathrm{sn}\,(3z) - \mathrm{sn}\, z}{\mathrm{sn}\,(3z) + \mathrm{sn}\, z} \equiv \frac{\mathrm{sn}\, z\, \mathrm{cn}\,(2z)\, \mathrm{dn}\,(2z)}{\mathrm{sn}\,(2z)\, \mathrm{cn}\, z\, \mathrm{dn}\, z};$$

b) $$\mathrm{sn}\,(u+v) \cdot \mathrm{sn}\,(u-v) \equiv (\mathrm{cn}^2 v - \mathrm{cn}^2 u) \cdot \frac{1}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{sn}^2 v};$$

c) $$[1 \pm \mathrm{cn}\,(u+v)] \cdot [1 \pm \mathrm{cn}\,(u-v)] \equiv \frac{(\mathrm{cn}\, u \pm \mathrm{cn}\, v)^2}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{sn}^2 v};$$

d) $$1 + \mathrm{cn}\,(u+v) \cdot \mathrm{cn}\,(u-v) \equiv \frac{\mathrm{cn}^2 u + \mathrm{cn}^2 v}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{sn}^2 v}$$

e) $$\mathrm{sn}\,(u+v) \cdot \mathrm{cn}\,(u-v) + \mathrm{sn}\,(u-v) \cdot \mathrm{cn}\,(u+v) \equiv \frac{2\, \mathrm{sn}\, u \cdot \mathrm{cn}\, u \cdot \mathrm{dn}\, v}{k^2\, \mathrm{sn}^2 u \cdot \mathrm{sn}^2 v}.$$

12. Igazoljuk az

$$\frac{\mathrm{sn}\left|\frac{u+v}{2}\right| \mathrm{dn}\left|\frac{u+v}{2}\right|}{\mathrm{cn}\left|\frac{u+v}{2}\right|} \equiv \frac{\mathrm{sn}\, u \cdot \mathrm{dn}\, v + \mathrm{sn}\, v\, \mathrm{dn}\, u}{\mathrm{cn}\, u + \mathrm{cn}\, v}$$

azonosságot.

13. Tekintsük (rögzített v és w mellett) az

$$f(z) = \mathrm{sn}^4 z(\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2 w) + \mathrm{sn}^4 v(\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 z) + \mathrm{sn}^4 w(\mathrm{sn}^2 z - \mathrm{sn}^2 v)$$

elliptikus függvényt. Határozzuk meg primitív periódusait és zérushelyeit.

14. Határozzuk meg a JACOBI-féle elliptikus függvények reziduumait az egyes szinguláris pontokban.

15. Határozzuk meg az

$$\int_0^K \frac{\mathrm{sn}^3 u\, du}{(1 + \mathrm{cn}\, u)\, \mathrm{dn}^2 u}$$

integrál értékét.

Útbaigazítás: Ügyesen kiegészíthetjük a tekintett integrált egy — megfelelő — periódus-paralelogramma kontúrján vett integrállá. Ez utóbbi értéke a reziduumtétel segítségével könnyen számítható. A 4 „periódusvonal" mentén vett integrál közül kettő közvetlen kapcsolatban van a számítandó integrállal, a másik kettőnél az integrandus páratlan voltát kell kihasználnunk.

γ) **1.** A primitív periódusok viszonyát τ-val jelölve, legyen $\tau = r + is$. Rögzítve (tetszőlegesen) r-et, és elvégezve az $s \to +\infty$ határátmenetet, határozzuk meg, hogy a JACOBI-függvények periódusait jellemző (!) ω és ω' mennyiségeknek mi a határértéke ez esetben, azaz mivel egyenlő $\lim_{s\to+\infty} \omega$, illetve $\lim_{s\to+\infty} \omega'$?

2. Az előző (1.) feladat eredményeit szem előtt tartva igazoljuk a JACOBI-függvények ϑ függvényekkel történő előállítása révén, hogy

$$\lim_{s\to+\infty} \operatorname{sn}(z;\tau) = \sin z; \qquad \lim_{s\to+\infty} \operatorname{cn}(z;\tau) = \cos z; \qquad \lim_{s\to\infty} \operatorname{dn}(z;\tau) = 1.$$

Útbaigazítás: Célszerűen a ϑ függvények FOURIER-sorát használhatjuk fel.

3. Az 1. feladat jelöléseit szem előtt tartva, határozzuk meg a $\lim_{s\to\infty} k(\tau)$ és $\lim_{s\to+\infty} k'(\tau)$ értékeket, azaz a modulus és komplementerje határértékét, majd ennek alapján a jellemző differenciálegyenletekre támaszkodva igazoljuk, hogy az $s \to +\infty$ esetben a JACOBI-féle elliptikus függvények határfüggvényei a trigonometrikus függvények.

4. Az előző (3.) feladatban szereplő tényt igazoljuk az elliptikus függvények jellemző addíciós tételeinek segítségével is.

δ) **1.** Igazoljuk az ún. LANDEN-féle függvénytranszformációból származó alábbi azonosságot:

$$\operatorname{sn}\left[(1+k')\,z;\ \frac{1-k'}{1+k'}\right] \equiv (1+k')\,\frac{\operatorname{sn}(z;k)\operatorname{cn}(z;k)}{\operatorname{dn}(z;k)}.$$

Útbaigazítás: A bizonyítást három úton is elvégezhetjük. A legegyszerűbb: meghatározzuk a jobb és bal oldalon álló elliptikus függvények periódusait, pólusait és e helyütt fő részeiket, és ezek azonosságának konstatálása után pl. a $z = 0$ helyen a két oldal értékét. Minthogy ezek is azonosnak adódnak, a két elliptikus függvény szükségképp azonos. A második út: mindkét oldalon áttérünk — a 4. § c) α) 2., 7. feladatok eredményeinek felhasználásával — a WEIERSTRASS-féle elliptikus függvényekre. A harmadik út: a τ-ra vonatkozó transzformációk hatását a JACOBI-függvények definíciójában szereplő ϑ függvényeknél vizsgáljuk meg először. Ez esetben célszerű felhasználni azt a könnyen igazolható tényt, hogy található olyan (a, b), illetve (a', b') számpár, amelyekkel képezve az

$$\frac{a\,\vartheta_1^2(z) + b\,\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_3^2(z)}, \quad \text{illetve} \quad \frac{a'\,\vartheta_1^2(z) + b'\,\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_3^2(z)}$$

elliptikus függvényeket, azok állandókká redukálódnak. Megjegyezzük, hogy ez utóbbiak alapján könnyen igazolható pl. a

$$\frac{\vartheta_3(z;\tau)\,\vartheta_4(z;\tau)}{\vartheta_4(2z;\,2\tau)} \equiv C(\tau)$$

azonosság.

2. Igazoljuk, hogy érvényesek az alábbi relációk:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}\,; \qquad \operatorname{cn}\left(\frac{K}{2}\right) = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}\,; \qquad \operatorname{dn}\left(\frac{K}{2}\right) = \sqrt{k'}.$$

Útbaigazítás: Használjuk fel az addíciós tételek alapján könnyen adódó duplikációs formulákat.

3. Fejezzük ki az $\operatorname{sn}(z + iK')$; $\operatorname{cn}(z + iK')$, illetve $\operatorname{dn}(z + iK')$ függvényértékeket a z helyen felvett értékek segítségével.

4. Igazoljuk az alábbi függvényegyenletet:

$$\operatorname{dn}(z;\, k) \equiv k' \operatorname{sn}(K' - iK - iz;\, k').$$

5. Tekintsük a

$$w = \frac{\operatorname{cn} z}{1 + \operatorname{sn} z}$$

függvényt, és határozzuk meg a w által leírt görbe alakját, mialatt z megkerüli a 0; K; $K + iK'$; iK' szögpontú paralelogrammát.

6. Igazoljuk az alábbi azonosságokat:

a) $$\frac{1}{\operatorname{dn}(u+v)} + \frac{1}{\operatorname{dn}(u-v)} \equiv \frac{2 \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v}\,;$$

b) $$\frac{1}{\operatorname{cn}(u+v)} + \frac{1}{\operatorname{cn}(u-v)} \equiv \frac{2k^2 \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{\operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 v - k'^2}\,;$$

c) $$\frac{1 - \operatorname{dn} 2z}{1 + \operatorname{dn} 2z} \equiv k^2 \frac{\operatorname{sn}^2 z \operatorname{cn}^2 z}{\operatorname{dn}^2 z}.$$

d)

α) 1. Határozzuk meg a

$$z = z(w) = \int_0^w \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

függvény inverzének primitív periódusát hurokintegrál segítségével.

Megoldás: Az integrandus a $\zeta = \pm 1$ pontokban elágazással rendelkezik. E két pontot összekötő egyenes mentén felhasítva a ζ síkot, azon az integrandus egyértékű. A primitív periódus értékét úgy kaphatjuk meg (előjeltől természetesen eltekintve), hogy egy tetszőleges pontból kiindulva, kiszámítjuk egy olyan hurokintegrál értékét, amely az elágazási pontokat körülöleli. Legegyszerűbben: a $\zeta = 0$ pontból a hasítás felső partján a $+1 - \varepsilon$ pontig elmegyünk, azt az ε sugarú körrel megkerüljük, majd visszatérünk az alsó parton az origóba; ezután egy hasonló típusú úttal a -1 pontot is megkerüljük. Ez annyit jelent, hogy a felső parton $\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = (1-\zeta^2)^{-\frac{1}{2}}$-t $+$

$+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$-tal egyenlőnek vesszük (és $dz = dx$). Az alsó parton visszatérve, a $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ függvényt kell integrálnunk; ugyanekkor $dz = -dx$. Végül elvégezzük az $\varepsilon \to 0$ határátmenetet. Így az 1, illetve a -1 pont körül az ε sugarú kör mentén vett integrál zérushoz tart, minthogy az integráció útja $O(\varepsilon)$, az integrandus viszont $O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ nagyságrendű, maga az integrál tehát $O(\sqrt{\varepsilon})$ rendben 0-hoz tart. Az inverz függvény (ismeretes, hogy ez sin z-vel egyenlő) primitív periódusa tehát:

$$\oint_C \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,d\zeta = 2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi,$$

aminek helyessége közvetlenül ellenőrizhető.

2. Tekintsük a

$$(z - z_0) = \int_{w_0}^{w} \frac{1}{4(\zeta - e_1)\,(\zeta - e_2)\,(\zeta - e_3)}\,d\zeta$$

integrál inverz függvényét és határozzuk meg megfelelő hurokintegrálok segítségével primitív periódusait.

Határozzuk meg, hogy mi a kapcsolat az e_i mennyiségek és a félperiódusok között.

3. Tekintsük a

$$z = \int_0^w \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)\,(1-k^2\zeta^2)}}$$

integrált, és határozzuk meg az inverz elliptikus függvény primitív periódusait. Mi a kapcsolat a periódusok és k, továbbá a periódusok és a $k' = \sqrt{1-k^2}$ mennyiség között?

4. Oldjuk meg az előző (3.) példával analóg feladatot az

$$\alpha)\quad z = \int_0^w \sqrt{\frac{1-k^2\zeta^2}{1-\zeta^2}}\,d\zeta,$$

illetve a

$$\beta)\quad z = \int_0^w \frac{1}{(\zeta^2-\alpha^2)\sqrt{(1-\zeta^2)\,(1-k^2\zeta^2)}}\,d\zeta$$

továbbá a

$$\gamma)\quad \int_0^w \frac{d\zeta}{(\zeta - e_1)\sqrt{(\zeta - e_2)\,(\zeta - e_3)}} \qquad \text{és} \qquad \delta)\quad \int_{w_0}^{w} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)\,(a-\zeta)}} \qquad (a \neq 1)$$

integrálok inverz függvényével kapcsolatban is.

β) 1. Írjuk fel normál alakok segítségével a

$$z = \int_0^w \frac{3x^4 + 2x^2}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}\, dx$$

függvényt.

Megoldás: Mint a bevezetésben említettük, a számláló fokszámát a

$$\frac{d}{dx}\left(x^m \cdot \sqrt{X(x)}\right) = \frac{c_0 x^{m+3} + c_1 x^{m+2} + \ldots + c_4 x^{m-1}}{\sqrt{X(x)}}$$

formula ismételt felhasználásával csökkentjük. Jelen példában a számláló negyedfokú, így m-et 1-nek kell (legalábbis első lépésben) választanunk: de

$$\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x^4 + x^2 + 1}\right) = \frac{3x^4 + 2x^2 + 1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

és így e fokszámcsökkentés egyetlen lépésben első fajú elliptikus integrálra vezet:

$$\int_0^w \frac{3x^4 + 2x^2}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}\, dx = \left[x\sqrt{x^4 + x^2 + 1}\right]_0^w - \int_0^w \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

A következőkben az első fajú integrált kell normál alakra hoznunk. Másodfokúra redukálható negyedfokú egyenletről lévén szó, a gyököket könnyen megállapíthatjuk, majd a konjugált gyökpároknak megfelelő gyöktényezőket valós együtthatós másodfokú gyöktényezőkké vonjuk össze:

$$\sqrt{x^4 + x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + x + 1)\,(x^2 - x + 1)}.$$

Ezután az integrációs változó, lineáris törttranszformációja révén az egyes tényezők első fokú tagjától szabadulunk meg; ugyanakkor gondoskodunk arról, hogy az állandók egyike és a másik tényező főegyütthatója 1-re redukálódjanak; ez a négy követelmény a transzformáció 3 szabad paraméterét — mint látni fogjuk — egyértelműen meghatározza. Tehát legyen

$$x = \frac{a\,y + b}{c\,y + d}$$

ahol a, b, c, d paramétereket úgy kell megválasztanunk, hogy a helyettesítés után létrejövő

$$\sqrt{(x^2 + x + 1)\,(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{cy + d} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{[(ay + b)^2 + (ay + b)\,(cy + d) + (cy + d)^2] \cdot [(ay + b)^2 - (ay + b)\,(cy + d) + (cy + d)^2]}$$

kifejezés ilyen alakúvá váljon rendezés után: $\frac{1}{cy + d}\sqrt{(1 + \alpha y^2)\,(\beta + y^2)}$. Azaz az egyenletek:

$$2\,ab + bc + ad + 2\,cd = 0; \qquad 2\,ab - bc - ad + 2\,cd = 0$$

$$b^2 + bd + d^2 = 1; \qquad a^2 - ac + d^2 = 1,$$

tehát $a = 1$; $b = -1$; $c = 1$; $d = 1$ adódik. Így

$$\int_0^w \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} = 2 \int_1^{\frac{1+w}{1-w}} \frac{dy}{\sqrt{(3y^2 + 1)(3 + y^2)}},$$

s ez végül az $y^2 + 3 = \frac{3}{z^2}$ transzformációval a kívánt normál alakba megy át. Eredményünk tehát:

$$z = \int_0^w \frac{3x^4 + 2x^2}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}\, dx =$$

$$= w\sqrt{w^4 + w^2 + 1} - \frac{2}{3} \int_{\sqrt{\frac{3(1-w)^2}{3(1-w)^2 + (1+w)^2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)\left(1 - \frac{8}{9}z^2\right)}} =$$

$$= -\frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)\left(1 - \frac{8}{9}z^2\right)}} + \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{\frac{3(1-w)^2}{3(1-w)^2 + (1+w)^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)\left(1 - \frac{8}{9}z^2\right)}} +$$

$$+ w\sqrt{w^4 + w^2 + 1}$$

$$= -\frac{2}{3} K\left|\frac{2}{3}\right| + \frac{2}{3} F\left|\frac{2}{3}; \arcsin \sqrt{\frac{3(1-w)^2}{3(1-w)^2 + (1+w)^2}}\right| + w\sqrt{w^4 + w^2 + 1}.$$

2. Írjuk át normál alakba az

$$\int_0^z \frac{(1 + 2x)\, dx}{\sqrt{(x - 1)(x^2 + 2x + 3)}}$$

elliptikus integrált.

Útbaigazítás: Az $x = 1 + \sqrt{1^2 + 2 \cdot 1 + 3}\, \mathrm{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$ helyettesítés, továbbá a következő igen egyszerű relációk segítségével vezethetjük vissza LEGENDRE-féle első- és másodfajú integrálra az adott elliptikus integrált:

$$d\left[\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right) - 2k^2 \sin^2 \varphi\right] \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$\frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{k^2}\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

ahol is az első reláció az $\int \frac{\mathrm{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\, d\varphi$ integrál átalakítására szolgál.

3. Írjuk át LEGENDRE-típusú normál alakra az

$$\int_0^w \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$$

elliptikus integrált!

4. Fejezzük ki az

$$\int_0^x \sqrt{\cos\zeta}\,d\zeta$$

elliptikus integrált LEGENDRE-féle normál alakban!

5. Fejezzük ki az alábbi elliptikus integrálokat LEGENDRE-féle normál alakban

a) $\int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2+x)(\beta^2+x)\gamma^2+x)}}$; $\quad(\alpha^2>\beta^2>\gamma^2>0)$

b) $\int_{-1}^z \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

6. Írjuk fel az alábbi értékeket a LEGENDRE-féle normál alakok (jelölések) segítségével:

a) $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$;

b) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\operatorname{tg}^3\Theta+8\operatorname{tg}^2\Theta-2\operatorname{tg}\Theta+4}{\sqrt{1+2\sin 2\Theta}}\operatorname{tg}\Theta\,d\Theta$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(3+x)}}$;

d) $\int_{-2+\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+4x+1}}$;

e) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(3+2x^2)}}$;

f) $\int_0^1 \frac{15x^2-2x}{\sqrt{x(1-x)(5x+4)}}dx$.

7. Igazoljuk az alábbi relációkat:

a) $\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)}} = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$;

b) $$\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-k'^2)}} = \int_0^{\frac{1}{k}\sqrt{1-y^2}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

c) $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\Phi}{\sqrt{1-4\sin^2\Phi}} = \frac{1}{2}F\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right).$$

γ—δ) 1. Igazoljuk, hogy $K'(k)$ — amelyet az $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}\,dx$ integrál segítségével definiáltunk — kifejezhető az

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,dt$$

alakban is.

Útbaigazítás: Kétféleképp is igazolhatjuk az állítást: A definíciós integrál integrációs változójának megfelelő transzformációjával $\left|: t = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2x^2}}\right|$, vagy pedig a JACOBI-féle elliptikus függvények elméletére támaszkodva. Ki tudjuk számítani ugyanis hurokintegrálok segítségével az $\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ integrál inverz függvényének periódusait, s azt is tudjuk, hogy e periódusok milyen kapcsolatban vannak K-val, illetve K'-vel. A hurokintegrálok integrációs útja természetesen deformálható pl. a valós tengely alsó, illetve felső partján a (0, 1) és az $\left(1, \frac{1}{k}\right)$ szakaszokba, továbbá az 1, illetve $\frac{1}{k}$ pont körül zérushoz tartó sugárral írt félkörökbe, illetve körökbe.

2. Mi a kapcsolata az

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\Phi}\,d\Phi, \qquad \text{illetve} \qquad E'(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k'^2\sin^2\Phi}\,d\Phi$$

mennyiségeknek az $\int \sqrt{1-k^2\sin^2\Phi}\,d\Phi$ elliptikus integrál inverz függvényének primitív periódusaival? Kifejezhető-e $E'(k)$ az $\int \sqrt{1-k^2\sin^2\Phi}\,d\Phi$ integrál segítségével, s ha igen, hogyan?

Útbaigazítás: Az $x = \sin \Phi$ helyettesítés a másodfajú — trigonometrikus alakban adott — elliptikus integrált az

$$\int \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}}\, dx$$

integrálba viszi át.

Erre támaszkodva, a periódusok meghatározására szolgáló hurokintegráloknak a valós tengely két partjára történő deformálásával a feladat első része könnyen megválaszolható.

A második résszel kapcsolatban az előző feladatra utalunk.

3. Adjuk meg a $K(k)$; $K'(k')$; $E(k)$ és $E'(k')$ függvények MACLAURIN-sorát.

Útbaigazítás: Az $(1 - k^2 \sin^2 \Phi)^{\pm \frac{1}{2}}$ típusú integrandusok MACLAURIN sorfejtése és tagonkénti integrálás vezet célhoz.

4. Fejezzük ki a $\frac{dK}{dk}$; $\frac{dK}{dk'}$; $\frac{dK'}{dk}$; $\frac{dK'}{dk'}$; $\frac{dE}{dk}$ stb. mennyiségeket K, E, k és k' felhasználásával.

Útbaigazítás: A definiáló integrálok paraméter szerinti deriválásáról van szó. Könnyen kimutatható, hogy a differenciálás és integrálás sorrendje felcserélhető. A kapott integrálok visszavezethetők az ismert módszerekkel elliptikus integrálokra.

5. Határozzuk meg $\frac{dK}{dn}$ és $\frac{dE}{dn}$ értékét $(n = k^2;\ n' = k'^2)$. Igazoljuk, hogy $y = (E - n' K)$ kielégíti a

$$4 n n' \frac{d^2 y}{dn^2} = y$$

differenciálegyenletet!

6. Legyen $m > 1$. Igazoljuk, hogy érvényesek az alábbi relációk:

$$m \int_0^1 k^m K'\, dk = (m - 1) \int_0^1 k^{m-2} E'\, dk;$$

$$(m + 1) \int_0^1 k^m E'\, dk = (m + 1) \int_0^1 k^m K'\, dk.$$

7. Igazoljuk, hogy E, illetve E' felírható az alábbi alakban:

$$E = \int_0^K \mathrm{dn}^2(u;\ k)\, du; \qquad E' = \int_0^K \mathrm{dn}^2(u;\ k')\, du.$$

Útbaigazítás: Kíséreljük meg az $\mathrm{sn}\, u = \sin \Phi$, illetve ehhez hasonló változótranszformációt.

8. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét

a) $\int_0^K \frac{\mathrm{sn}^3 u}{(1 + \mathrm{cn}\, u)\, \mathrm{dn}^2 u}\, du;$ b) $\int_0^u \frac{du}{1 + \mathrm{cn}\, u}$

9. Az ún. LANDEN-féle transzformáció már szerepelt a 4. § *c)* δ) 1. feladatban. Az inverz függvényeket illetően érvényes az alábbi azonosság:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-k^{*2}\,y^2)}} = (1+k') \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2\,x^2)}},$$

ahol $k^* = (1-k')\,(1+k')^{-1}$.

Bizonyítsuk be, hogy a fenti reláció valóban fennáll. Határozzuk meg a reláció tényleges kapcsolatát a LANDEN-féle transzformációval.

10. Tegyük fel, hogy $0 < k < 1$. Igazoljuk, hogy ez esetben — elég sokszor alkalmazva egymás után a LANDEN-féle transzformációt — az

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2\,x^2)}}$$

integrál tetszőlegesen megközelíti egy elemi függvény és egy transzcendens függvény szorzatát.

Útbaigazítás: Könnyen igazolhatjuk, hogy a $0 < k < 1$ esetben $k^* < k^2$. Így tehát elég sokszor alkalmazva a LANDEN-transzformációt, a fellépő k; k^*; k^{**}; ... sorozat igen gyorsan (exponenciális rendben) 0-hoz, az integrál tehát $C(x;\,k) \cdot \arcsin x$-hez konvergál.

$C_n(x;k)$ megállapítása a következőképp történhet: Bevezetve a $k' = \frac{b}{a}$ jelölést $(0 < b < a)$, könnyen belátható, hogy az eredeti integrál így írható át:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2\,x^2)}} = \int_0^{\Phi = \arcsin x} \frac{d\Phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Phi}} = a\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\sqrt{a^2\cos^2\Phi + b^2\sin^2\Phi}},$$

ami a LANDEN-féle transzformáció elvégzése után a következő alakba megy át:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2\,x^2)}} = a_1\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\sqrt{a_1^2\cos^2\Phi + b_1^2\sin^2\Phi}},$$

ahol $a_1 = \frac{a+b}{2}$; $b_1 = \sqrt{ab}$. Ez lehetővé teszi, hogy áttekintsük az egymás után többször elvégzett LANDEN-transzformációk sorozatát.

11. Az előző (10.) feladatra támaszkodva, határozzuk meg, hogy mi a kapcsolat a $K(k)$ mennyiség és azon intervallum-skatulyázás magja között, amelyet a következő formulák jellemeznek:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}; \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n\,b_n}; \qquad a_1 = 1; \qquad b_1 = \sqrt{1-k^2}.$$

Ugyanezen intervallum-skatulyázást tekintve, hogy kell az első elemeket megválasztanunk, hogy az új maggal $K'(k)$ legyen kifejezhető?

12. A megelőző (10., illetve 11.) feladatra támaszkodva, határozzuk meg 4 értékes jegyre pontosan $K(0{,}5)$ és $K'(0{,}5)$, továbbá $\tau(k = 0{,}5)$ értékét.

13. Határozzuk meg, hogy a LANDEN-féle transzformáció milyen transzformációs formulát ad a $K(k)$ függvény részére.

e)

$\alpha)$ 1. Legyenek a és b valós számok, és tekintsük az

$$x = \wp(t;\ \omega_1,\ \omega_2); \qquad y = \wp'(t;\ \omega_1,\ \omega_2)$$

egyenletpárt, ahol $\omega_1 = a$, $\omega_2 = i\,b$. Igazoljuk, hogy t-t valós paraméternek tekintve, fenti egyenletpár egy síkgörbe paraméteres egyenletrendszere. Mi a feltétele annak, hogy e görbe t_1, t_2, illetve t_3 paraméterértékhez tartozó pontja kollineáris legyen? Határozzuk meg a görbe inflexiós pontjait.

Útbaigazítás: $\wp(z) - \frac{1}{z^2}$, illetve $\wp'(z) + \frac{2}{z^2}$ MACLAURIN-sorát megadtuk a 4. § *b) α)* 2., illetve *β)* 2. feladatban. Ezek alapján igen könnyen belátható, hogy — az $a = \omega_1$; $i\,b = \omega_2$ feltételek miatt — $\wp(z)$, illetve $\wp'(z)$ sorában valamennyi együttható valós szám, és így z valós értékeihez x és y valós értékeit rendeltük. Egyébként az

$$y^2 = 4x^3 - g_2\,x - g_3; \qquad g_2 = 60 \cdot \sum_{m,\,n=-\infty}^{\infty}{}' [m\,a + i\,n\,b]^{-4};$$

$$g_3 = 140 \cdot \sum_{m,\,n=-\infty}^{\infty}{}' [m\,a + i\,n\,b]^{-6}$$

görbe paraméteres egyenletét adtuk meg, ahol tehát g_2 és g_3 is valósak. Megjegyezzük még, hogy az $\omega_1 = a$ feltétel miatt a futó pont a görbét végtelen sokszor befutja, mialatt t a $(-\infty, \infty)$ intervallumon szalad végig.

Tegyük fel mármost, hogy az

$$y - m\,x - b = 0$$

egyenes a görbét 3 pontban (M_1; M_2; M_3) metszi. Ezekhez olyan paraméterértékek tartoznak, amelyek kielégítik a

$$\wp'(t) - m\,\wp(t) - b = 0$$

egyenletet. Minthogy pedig a

$$w = \wp'(z) - m\,\wp(z) - b$$

elliptikus függvénynek egyetlen — harmadrendű — pólusa van, éspedig az origóban, azért egy megfelelő, az origót tartalmazó periódus-paralelogrammában levő pontosan 3 gyökhelyének összege is 0 kell hogy legyen; általában pedig:

$$t_1 + t_2 + t_3 \equiv 0,\ \mathrm{mod}(\omega_1;\ \omega_2), \qquad \text{azaz} \qquad t_1 + t_2 + t_3 = m\,\omega_1 + n\,\omega_2.$$

Ha tehát kiválasztunk két pontot (M_1 és M_2; paramétereik t_1 és t_2) a görbén, akkor a rajtuk átmenő egyenes a görbét még egy harmadik (M_3; t_3) pontban metszi, és

$$t_3 = m\,\omega_1 + n\,\omega_2 - (t_1 + t_2).$$

Megjegyezzük még, hogy m és n bármilyen (egész értékű) választásához a görbének egyugyanazon pontja tartozik, tekintettel $\wp$ és $\wp'$ periodicitására.

Könnyen belátható, hogy az inflexiós pontok úgy származtathatók, hogy azokban esik egybe az a három — általában különböző — pont, amelyben egy egyenes metszi a görbét. Az inflexiós pontok tehát:

$$3\tau \equiv 0, \mod(\omega_1; \omega_2); \qquad 3\tau = m\omega_1 + n\omega_2; \qquad \tau = \frac{1}{3}(m\omega_1 + n\omega_2).$$

Összesen 9 ilyen inflexiós pont adódik, éspedig a:

$$\tau_0 = 0; \qquad \tau_1 = \frac{1}{3}\omega_1; \qquad \tau_2 = \frac{1}{3}(\omega_1 + \omega_2); \qquad \tau_3 = \frac{1}{3}\omega_2; \qquad \tau_4 = \frac{2}{3}\omega_1;$$

$$\tau_5 = \frac{2}{3}(\omega_1 + \omega_2); \qquad \tau_6 = \frac{2}{3}\omega_2; \qquad \tau_7 = \frac{1}{3}\omega_1 + \frac{2}{3}\omega_2 \quad \text{és} \quad \tau_8 = \frac{2}{3}\omega_1 + \frac{1}{3}\omega_2$$

paraméterértéknél.

2. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszisen a $(0, b)$ ponttól mért ívhosszat mint az e excentricitás és a φ szög (φ az excentricitási szög pótszöge) függvényét.

3. Határozzuk meg az

$$r = a\sqrt{\cos 2\Theta}$$

egyenletű lemniszkáta (teljes) ívhosszát!

4. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű hiperbolán a $(\pm a; 0)$ ponttól mért ívhosszt mint a $\xi = \frac{b}{\sqrt{b^2 + y^2}}$ változó függvényét.

5. Húzzunk az $x = \wp(w)$; $y = \wp'(w)$ egyenletű görbéhez érintőket a (görbén rajta fekvő) P pontból. Az érintési pontok: A, B, C és D. Igazoljuk, hogy az AB és CD egyenesek: Q metszéspontja, hasonlóképp az AC és BD : R, illetve, az AD és BC : S metszéspontja is rajta van a görbén.

6. *Elliptikus koordináták.* Tekintsük az

$$\frac{x^2}{\varrho - a^2} + \frac{y^2}{\varrho - b^2} + \frac{z^2}{\varrho - c^2} - 1 = 0 \qquad (0 < c^2 < b^2 < a^2)$$

egyenletet, és igazoljuk, hogy a tér bármely $P(x, y, z)$ pontjához az egyenlet három valós gyöke ($\varrho = \lambda$; $\varrho = \mu$; $\varrho = \nu$) tartozik (a P pont ún. elliptikus koordinátái), amelyekre érvényes a

$$0 < c^2 < b < b^2 < \mu < a^2 < \lambda$$

egyenlőtlenség.

Az új koordináták ortogonálisak, minthogy (ezt számítással verifikáljuk!)

$$4\,ds^2 = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(\lambda-a^2)(\lambda-b^2)(\lambda-c^2)}\,d\lambda^2 + \frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{(\mu-a^2)(\mu-b^2)(\mu-c^2)}\,d\mu^2 + \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(\nu-a^2)(\nu-b^2)(\nu-c^2)}\,d\nu^2.$$

Érdemes bevezetni az

$$f(\varrho) = (\varrho-a^2)(\varrho-b^2)(\varrho-c^2)$$

jelölést; ugyanis az α, β, γ új változók bevezetése a

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} = d\alpha; \qquad \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = d\beta; \qquad \frac{d\nu}{\sqrt{f(\nu)}} = d\gamma$$

relációkon keresztül megkönnyíti egyrészt az ívelemnégyzet felírását, másrészt a differenciálegyenletek átírását elliptikus koordinátákra.

Igazoljuk mármost, hogy a régi x, y és z koordináták egyértékű függvényei az új α, β és γ koordinátáknak.

Határozzuk meg az $x(\alpha,\beta,\gamma)$; $y(\alpha,\beta,\gamma)$; . . .; $\lambda(\alpha,\beta,\gamma)$; . . . stb. függvényeket.

β) **1.** Igazoljuk, hogy a

$$w = \operatorname{sn} z$$

függvény a z sík $(-K; K; K + iK'; -K + iK')$ szögpontú téglalapjának belsejét a w sík felső félsíkjára képezi le konformisan.

2. Igazoljuk, hogy a

$$w = \wp(z)$$

függvény az origo csúcspontú fél periódus-paralelogramma belsejét a w sík felső félsíkjára képezi le konformisan.

3. Tekintsük az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszist. Határozzuk meg azt a

$$w = f(z)$$

függvényt, amely az ellipszis belsejét az egységkör belsejébe képezi le konformisan.

Útbaigazítás: Nézzük át figyelmesen a 4. § *e) α)* 2. feladat kidolgozását. A megoldás egyébként:

$$w = \sqrt{k}\,\operatorname{sn}\left[2\frac{K}{\pi}\arcsin\frac{z}{e}\right].$$

ahol $e = \sqrt{a^2 - b^2}$: a lineáris excentricitás, továbbá

$$\frac{K'}{K} = \frac{2}{\pi}\ln\frac{a+b}{a-b},$$

aminek alapján $h = e^{i\pi\tau} = e^{-\pi\frac{K'}{K}} = \left|\frac{a-b}{a+b}\right|^2$, és

$$k = 4\sqrt{h}\left[\frac{(1+h^2)(1+h^4)\ldots}{(1+h)(1+h^3)\ldots}\right]^4.$$

4. Tekintsük a

$$w = C \cdot \ln \frac{\vartheta_1\left(\frac{z-a}{4h}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z-2h+a}{4h}\right)}; \qquad \left|\tau = i\frac{C_1}{4h};\ 0 < a < C_1 < h\right|$$

függvény által létesített leképzést a Re $z = -h$ és Re $z = h$ egyenletű egyenesek által határolt sávban: Határozzuk meg a $z = -h + i\,t$ és $z = h + i\,t$ egyenesek, továbbá a $|z - a - n\,\omega_2| = \varepsilon \ll a$ egyenletű körök képeit, és a Re $w = \text{const}$ és Im $w = \text{const}$ paramétervonalak generátorgörbéit a $z = a + n\,\omega_2$ $(n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2\ldots)$ pontok környezetében! (Elektroncső potenciálmezeje; periodikus örvények két fal által határolt áramlásnál.)

γ) 1. *A matematikai inga.* A φ_0 kezdőszög alatt v_0 sebességgel elindított, L hosszúságú fonalra függesztett m tömegű matematikai inga kinetikus és potenciálos energiájának összege állandó:

$$\frac{m}{2}L^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + m\,g\,L\,(1-\cos\varphi) = \frac{m}{2}v_0^2 + m\,g\,L\,(1-\cos\varphi_0),$$

azaz

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{L^2}v_0^2 + 2g\frac{1}{L}(\cos\varphi - \cos\varphi)$$

tehát

$$t = L\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{v_0^2 + 2g\,L\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}}.$$

A $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ relációt figyelembe véve, és v_0-t φ_0-ba olvasztva

$$\left[:\, m\,g\,L\,(1-\cos\varphi_0^*) = \frac{m}{2}v_0^2 + m\,g\,L\,(1-\cos\varphi_0)\right],$$

majd elvégezve a

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin u\,\sin\frac{\varphi_0^*}{2}$$

transzformációt,

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0^*}{2}\sin^2 u}} = \sqrt{\frac{L}{g}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$$

azaz

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}} F\left(\sin\frac{\varphi_0^*}{2};\ u\right) - \sqrt{\frac{L}{g}} K\left(\sin\frac{\varphi_0^*}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{L}{g}} F\left(\sin\frac{\varphi_0^*}{2};\ \arcsin\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0^*}{2}}\right) - \sqrt{\frac{L}{g}} K\left(\sin\frac{\varphi_0^*}{2}\right),$$

illetve

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_0^*}{2} \cdot \operatorname{sn}\left[\sqrt{\frac{g}{L}}\, t + K\right].$$

2. *Nyomott rúd.* Az L hosszúságú, homogén, az x tengelyben egyik végével az origóba érő rudat P erővel nyomjuk. A kihajlott rúd alakját az $y(x)$ görbe, görbületi sugarát $\varrho(x)$ jelzi. Ez esetben

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -\frac{P}{EI}y$$

fejezi ki a rugalmas egyensúlyi helyzetet. Az egyenletet integrálva (y szerint: $y''(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{d}{dy}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}$), és a $\beta^2 = \frac{P}{EI}$ jelölést bevezetve:

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{1}{2}\beta^2 y^2 = C.$$

C geometriai jelentése: $x = 0$-nál $y = 0$, és így a kihajlott rúd 0-beli érintőjének irányszögét α-val jelölve:

$$C = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \cos\alpha.$$

A legnagyobb kihajlást az $y' = 0$ egyenlet jellemzi, azaz

$$y_{\max} = \frac{1}{\beta}\sqrt{2(1-C)}.$$

A megelőző egyenletet y'-re megoldva:

$$y'^2 = \frac{1-\left(C+\frac{1}{2}\beta^2y^2\right)^2}{\left(C+\frac{1}{2}\beta^2y^2\right)^2}, \quad \text{azaz} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{C+\frac{1}{2}\beta^2y^2}{\sqrt{1-\left(C+\frac{1}{2}\beta^2y^2\right)^2}},$$

tehát végül

$$x = \int_0^y \frac{C+\frac{1}{2}\beta^2y^2}{\sqrt{1-\left(C+\frac{1}{2}\beta^2y^2\right)^2}}\, dy.$$

Bevezetve mármost az $y = \frac{1}{\beta}\sqrt{2(1-C)}\cos\varphi = y_{\max}\cdot\cos\varphi$ relációval az új φ változót, illetve a $k^2 = \frac{1}{2}(1-C)$ állandót, az

$$x = -\frac{1}{\beta}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\frac{1-2k^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi$$

elliptikus integrál adódik. Így

$$x = \frac{1}{\beta}\{2[E(k) - E(k;\,\varphi)] - [K(k) - F(k;\,\varphi)]\},$$

(lásd a 4. § *d) β)* 2. feladatot), vagy az állandókat és az eredeti változót visszaírva:

$$x = \sqrt{\frac{EI}{P}}\left\{2\left[E\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right) - E\left(\sin\frac{\alpha}{2};\ \arccos\frac{y\sqrt{\frac{P}{EI}}}{1\sin\frac{\alpha}{2}}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \left[K\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right) - F\left(\sin\frac{\alpha}{2};\ \arccos\frac{y\sqrt{\frac{P}{EI}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)\right]\right\},$$

a kihajlott rúd egyensulyi alakja.

C) RÉSZ

5. §. A KOMPLEX SÍKON ÉRTELMEZETT LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Valamely adott differenciálegyenlettel kapcsolatban általában a következő problémákat szoktuk vizsgálni: milyen feltételek mellett létezik — s ha létezik, milyen mellékfeltételekkel határozható meg egyértelműen — olyan valósváltozós függvény, amely valamely intervallumon azonosan kielégíti az egyenletet; hogyan határozható meg praktikusan ilyen függvény; melyek ezen függvény jellemző függvénytani sajátosságai stb.? Bizonyos, az egyenletben szereplő függvényekkel kapcsolatos regularitási feltételek mellett található olyan *komplexváltozós* függvény is, amely valamely tartományban azonosan kielégíti az adott egyenletet.

Megkülönböztetjük azokat a differenciálegyenleteket, amelyeknek a megoldásai csakis a differenciálegyenletben szereplő függvények által egyértelműen definiált helyeken rendelkezhetnek szinguláris pontokkal (stabil szingularitások), és azokat, amelyek megoldásaiban fellépő szingularitások helyét a mellékfeltételek megváltoztathatják (mobil szingularitások).

A következőkben a lineáris differenciálegyenleteket vizsgáljuk a komplex síkon. Itt csak stabilis szingularitások léphetnek fel.

a) A lineáris differenciálegyenletekről általában

α) Egzisztenciatételek; hatványsor alakú megoldások

A

$$\frac{dw_i}{dz} = \sum_{k=1}^{n} Z_{k;i}(z) \cdot w_k(z); \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenletrendszer, illetve a

$$w^{(n)}(z) + W_{n-1}(z) \cdot w^{(n-1)}(z) + W_{n-2}(z)\, w^{n-2}(z) + \ldots + W_1(z) \cdot w'(z) + W_0(z) \cdot w(z) \equiv 0$$

n-ed rendű homogén lineáris differenciálegyenlet reguláris pontjának nevezzük a z_0 pontot, ha e pontban a rendszer, illetve az n-ed rendű egyenlet valamennyi $Z_{k;i}(z)$, illetve $W_k(z)$ együtthatója reguláris. Reguláris pont környezetében rendszerint hatványsor alakjában — kivéve a néhány zárt alakban megoldható esetet — keressük az — itt feltételezetten reguláris — megoldást:

$$w(z;\ z_0) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

A $w_i(z)$ és $Z_{k;i}(z)$, illetve $W_k(z)$ hatványsorának helyettesítése után mindkét oldalt hatványsor alakba rendezzük, és az együtthatókat azonosítjuk. Ezáltal egy végtelen egyenletrendszerre jutunk, amelyből a c_i együtthatók kiszámíthatóak.

A számolás nem pusztán formális, ti. az egzisztenciatétel szerint *reguláris pontban a fenti elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer, illetve az n-ed rendű differenciálegyenlet* (éspedig pontosan *n* számú lineárisan független) a kérdéses pontban *reguláris megoldással rendelkezik.*

Ennek bizonyítása vagy a szukcesszív approximáció módszerének felhasználásával konstruált függvény megoldás voltának és regularitásának igazolásával, vagy pedig a formális számolással nyert hatványsor valamely $\varrho(z_0) > 0$ sugarú körben való konvergenciájának kimutatásával történhet. Ez utóbbi esetben a majorálás módszere alkalmazható könnyen.

β) A megoldásrendszerek általános tulajdonságai

Ezzel kapcsolatban csak annyit jegyzünk meg, hogy a lineáris differenciálegyenletek, illetve egyenletrendszerek megoldásrendszereivel kapcsolatban a valósban megismert tételek változatlanul érvényesek a komplex síkon is — a reguláris pontokat tekintve.

γ) A megoldások analitikus folytatása, és a lineáris függetlenség

A 2. §-ban megismert permanenciatétel egyszerű folyománya, hogy a lineáris differenciálegyenlet, illetve rendszer bármely megoldásának analitikus folytatása is kielégíti a kérdéses egyenletet minden olyan reguláris pontban, amely a kiindulási elemet meghatározó reguláris ponttal összeköthető egy csupa reguláris pontból álló görbével.

Könnyen belátható az a tétel is, hogy lineárisan független megoldásrendszer analitikus folytatása révén nyert megoldásrendszer mindenütt lineárisan független. Hiszen a rendszer WRONSKY-determinánsa is analitikusan folytatódik, és a reguláris pontokból álló görbén — amely a folytatás útját kijelöli — sehol sem tűnhet el, minthogy itt exponenciális típusú függvény.

δ) Izolált szinguláris pontok vizsgálata

Az együtthatók — azaz az egyenlet, illetve rendszer — izolált szinguláris pontjai környezetében a megoldásrendszer függvénytani tulajdonságait úgy határozhatjuk meg, hogy megvizsgáljuk e megoldásrendszer viselkedését egy — csakis a kérdéses izolált szinguláris pontot körülzáró — görbe mentén történő analitikus folytatás esetén. A részletekre elsősorban a következő pontban, a másodrendű differenciálegyenletekkel kapcsolatban térünk ki. Az itt tapasztaltakat könnyen átvihetjük magasabbrendű egyenletekre, illetve rendszerekre.

b) A másodrendű homogén egyenletek esete

A következőkben a

$$w'' + p(z)\, w' + q(z)\, w = 0$$

másodrendű, homogén lineáris differenciálegyenlet izolált szinguláris pontjainak környezetében vizsgáljuk a megoldásrendszert.

α) A megoldásrendszer szingularitásának típusai

Legyen $z = z_0$ a fentebb adott lineáris egyenlet izolált szinguláris pontja, K pedig egy z_0 középpontú körgyűrű, amelynek belsejében $p(z)$ LAURENT-sora: $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} p_\nu (z - z_0)^\nu$, és ugyanígy $q(z)$ LAURENT-sora: $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} q_\nu (z - z_0)^\nu$ is az együtthatókhoz: $p(z)$-hez, illetve $q(z)$-hez konvergálnak. E körgyűrű minden pontja reguláris pont, és így bármely $\{w_1; w_2\}$ lineárisan független megoldásrendszer analitikusan folytatható e körgyűrűben, s az analitikus folytatás ismét lineárisan független rendszert ad. Teljesen megkerülve a z_0 pontot a kétszeresen összefüggő K-ban, így egy lineárisan független $\{w_1; w_2\}$ rendszerre jutunk; minthogy megoldásrendszer analitikus folytatásaképp jutottunk erre, a permanenciatétel szerint ismét megoldásrendszert kaptunk, amely tehát — a lineáris egyenletek általános elmélete szerint — lineárkombinációja pl. az eredeti megoldásrendszernek:

$$\begin{aligned} w_1^+ &= a_{11} w_1 + a_{12} w_2 \\ w_2^+ &= a_{21} w_1 + a_{22} w_2 \end{aligned} \qquad \text{ahol is} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

hiszen ellenkező esetben w_1^+ és w_2^+ nem lennének lineárisan függetlenek.

Felvetjük mármost a következő kérdést: megadható-e olyan megoldás, amely a szinguláris pont körüli analitikus folytatás révén csak állandóval szorzódik, azaz: hogyan választandók meg a b_1, b_2 állandók, hogy a

$$w = b_1 w_1 + b_2 w_2$$

megoldás w^+ analitikus folytatása w konstansszorosa legyen:

$$w^+ = \lambda w.$$

A válasz: λ és a b_1, b_2 állandók az

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) b_1 + a_{12} b_2 &= 0 \\ a_{21} b_1 + (a_{22} - \lambda) b_2 &= 0 \end{aligned}$$

sajátérték-probléma megoldásai. Ha itt két különböző λ_1 és λ_2 sajátérték adódik, akkor ezekhez egy-egy olyan w_I és w_{II} — lineárisan független — megoldás tartozik, amelyekre

$$w_I^+ = \lambda_1 w_I, \qquad \text{illetve} \qquad w_{II}^+ = \lambda_2 w_{II},$$

és így (a $\varrho_1 = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_1$; $\varrho_2 = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_2$ jelöléseket használva) a K gyűrűben a

$$\frac{w_I}{(z - z_0)^{\varrho_1}}, \quad \text{illetve} \quad \frac{w_{II}}{(z - z_0)^{\varrho_2}}$$

függvények egyértékűek, és így regulárisak, ott tehát LAURENT-sorba fejthetők. Más szóval w_I, illetve w_{II} a

$$w_I = (z - z_0)^{\varrho_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^I (z - z_0)^k,$$

illetve

$$w_{II} = (z - z_0)^{\varrho_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^{II} (z - z_0)^k$$

alakban állítható elő.

Ha viszont $\lambda = \lambda_1$ kétszeres sajátérték, akkor az előző módon egy ugyanilyen típusú w_I megoldást nyerhetünk, míg egy másik — az előzőtől lineárisan független — megoldás: w_{II} analitikus folytatása az alábbi alakban adódik:

$$w_{II}^{+} = \lambda_1 w_{II} + a_{21} w_I.$$

Ennek következtében

$$\frac{w_{II}}{w_I} - \frac{a_{21}}{2\pi i \lambda_1} \ln (z - z_0) = \frac{w_{II}}{w_I} - a \ln (z - z_0)$$

reguláris K-ban, azaz

$$w_{II} = (z - z_0)^{\varrho_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z - z_0)^k + a\, w_I \ln (z - z_0)$$

alakú lesz.

Kivételesen megtörténhet, hogy a_{21} zérusnak adódik (kétszeres sajátértékről lévén szó, ez annyit jelent, hogy ekkor fennállanak az $a_{12} = a_{21} = 0$ és $a_{11} = a_{22}$ egyenlőségek). Ez esetben viszont a is 0-nak adódik, azaz a második alapmegoldás sem tartalmaz logaritmikus tagot.

Mármost a z_0 szinguláris pontot *nem lényeges szingularitás*nak nevezzük, ha a w_I és a w_{II}-ben szereplő LAURENT-sorfejtés *is* csak *véges számú negatív* exponensű tagot tartalmaz. Elenkező esetben z_0 *lényegesen szinguláris* pontja a differenciálegyenletnek.

A másodrendű lineáris differenciálegyenletnek $z = z_0$ akkor és csakis akkor nem-lényegesen szinguláris pontja, ha itt $p(z)$-nek legfeljebb elsőrendű, $q(z)$-nek pedig legfeljebb másodrendű pólusa van.

β) A praktikus megoldás nem-lényegesen szinguláris pontban

A nem-lényegesen szinguláris z_0 pontot lineáris transzformációval az origóba eltolva, ott a differenciálegyenlet (z^2-tel történő szorzás után) ilyen alakba írható:

$$z^2 w'' + z(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots) w' + (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots) w = 0$$

és ott — az előzőek szerint — e differenciálegyenletnek legalább egy

$$w = z^{\varrho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

alakú megoldásának kell lennie (ti. a LAURENT-sorban esetleg szereplő negatív exponensű tagokból z legmagasabb negatív kitevőjű hatványa kiemelhető).

A c_k együtthatókra a következő egyenletrendszer adódik:

$$c_0 f_0(\varrho) = 0$$

$$c_1 f_0(\varrho + 1) + c_0 f_1(\varrho) = 0$$

$$c_2 f_0(\varrho + 2) + c_1 f_1(\varrho + 1) + c_0 f_2(\varrho) = 0$$

$$\ldots$$

$$c_n f_0(\varrho + n) + c_{n-1} f_1(\varrho + n - 1) + \ldots + c_0 f_n(\varrho) = 0$$

$$\ldots$$

ahol is a következő jelöléseket használtuk:

$$f_0(\varrho) = \varrho(\varrho - 1) + \varrho\, a_0 + b_0$$
$$f_n(\varrho) = \varrho\, a_n + b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Az első egyenletet a $c_0 = 0$ választással kielégítve, a triviális $w = 0$ megoldás adódna. Azt tehát az $f_0(\varrho) = 0$ **választással** oldjuk meg, és így ϱ értékét a „mellékelt" másodfokú kifejezés gyökeként kapjuk. Amennyiben az

$$f_0(\varrho) = 0$$

ún. *alapegyenlet*nek két *különböző és* egymástól *nem egész számmal* különböző megoldása van (ez felel meg az *a) α)* pont $\lambda_1 \neq \lambda_2$ esetének), akkor így megkapjuk a két lineárisan független alapmegoldást jellemző ϱ_1 és ϱ_2 **exponenseket**, és számítani tudjuk szukcesszíve a két megoldás egyes soregyüttheteit.

Ha *kétszeres* gyöke van, vagy *két* egymástól *egész számban különböző* gyöke van az alapegyenletnek, akkor így csak egy megoldást kaphatunk ($\lambda_1 = \lambda_2$ esete). A másik megoldás ti. ekkor logaritmikus tagot is tartalmaz. Ennek praktikus meghatározása az állandók variálásának ismert módszere segítségével történhet.

A $\lambda_1 = \lambda_2$-vel kapcsolatban említett speciális eset akkor léphet fel, ha az alapegyenlet két gyöke, ϱ_1 és ϱ_2 egész számmal különböznek:

$$\varrho_2 = \varrho_1 - m: \qquad (m > 0).$$

Ha ti. ez esetben érvényes a

$$c_{m-1} f_1(\varrho_1 - 1) + c_{m-2} f_2(\varrho_1 - 2) + \ldots + c_0 f_m(\varrho_1 - m) =$$
$$= c_{m-1} f_1(\varrho_2 + m - 1) + c_{m-2} f_2(\varrho_2 + m - 2) + \ldots + c_0 f_m(\varrho_2) = 0$$

egyenlet (amely a szabadon választható c_0 értékétől **függetlenül érvényes avagy sem**), akkor egyik alapmegoldás sem tartalmaz logaritmikus tagot, sőt *az egyik* ekkor *gyakran polinom*ra redukálódik (ti. a ϱ_2 exponenshez tartozó).

γ) Fuchs-típusú differenciálegyenletek

Ha a lineáris differenciálegyenletnek nincs lényegesen szinguláris pontja (a végtelen távoli pontban sem), akkor azt Fuchs-típusúnak nevezzük. α_k-val ($k = 1, 2, \ldots, n$) jelölve az egyenlet (nem-lényeges) szinguláris pontjait, a másodrendű differenciálegyenlet akkor és csakis akkor Fuchs-típusú, ha:

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z - \alpha_k}; \qquad q(z) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{B_k}{(z - \alpha_k)^2} + \frac{C_k}{z - \alpha_k} \right]$$

alakú, ahol

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n = 0.$$

Megjegyezzük még, hogy az összes szinguláris helyekhez tartozó alapegyenletek gyökeinek összege 1-gyel kevesebb a végesben levő szinguláris pontok számánál.

δ) A Riemann-féle *P*-függvény

Könnyen belátható, hogy a pontosan egy, illetve két szinguláris ponttal rendelkező FUCHS-típusú differenciálegyenlet zárt alakban is megoldható: a $w'' = 0$, illetve valamely EULER-típusú egyenlet. A legegyszerűbb, önálló érdekességgel bíró FUCHS-típusú differenciálegyenletek tehát három szinguláris ponttal rendelkeznek.

Mármost a z sík egy lineáris transzformációjával mindig elérhetjük, hogy e szinguláris helyek a 0, 1 és ∞ pontba essenek. Ha az alapegyenletek gyökeit e pontokban rendre α_1, α_2, illetve β_1, β_2, illetve γ_1, γ_2-vel jelöljük (amikor is szükségképp: $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 2 - 1 = 1$) akkor ezáltal a $p(z) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z-1}$ és a $q(z) = \frac{B_1}{z^2} + \frac{B_2}{(z-1)^2} + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z-1}$ együtthatók értékét egyértelműen definiáltuk (lévén $C_1 + C_2 = 0$), azaz az adatokkal a differenciálegyenlet s így annak megoldásrendszere is egyértelműen definiált; e rendszer valamennyi függvényét a RIEMANN-által bevezetett

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{pmatrix}$$

jellel jelöljük. Megjegyezzük továbbá, hogy ha w helyett az új u függő változót vezetjük be a

$$w = z^p \cdot (z-1)^q \cdot u(z)$$

relációval, akkor az u-ra vonatkozó új egyenlet is FUCHS-típusúnak adódik, 3 szinguláris pontja változatlanul a 0, 1 és ∞-ben van, viszont az alapegyenletek gyökei: $(\alpha_1 - p;\ \alpha_2 - p)$; $(\beta_1 - q;\ \beta_2 - q)$, illetve $(\gamma_1;\ \gamma_2)$. Más szóval a függő változó megfelelő transzformációjával azt is mindig elérhetjük, hogy az alapegyenlet egyik gyöke pl. a 0 és az 1 pontban a 0 legyen. Ez esetben a ∞-hez tartozó gyököket α, illetve β-val jelölve, az adódó differenciálegyenlet: az ún. *hipergeometrikus* vagy GAUSS-*féle differenciálegyenlet:*

$$u'' + \frac{-\gamma + (1 + \alpha + \beta)\, z}{z(z-1)}\, u' + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)}\, u \equiv 0,$$

megoldásrendszere pedig:

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{pmatrix}.$$

A $z = 0$ hely körüli azon alapmegoldás, amely a $\varrho = 0$ alapegyenlet-gyökhöz tartozik (és kielégíti a $P(0) = 1$ feltételt) az ún. *hipergeometrikus* sor:

$$F(\alpha, \beta, \gamma;\ z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)} z^2 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n) \cdot \Gamma(n+1)}$$

ε) Lényegesen szinguláris pontok

A zárt alakban is megoldható

$$z\frac{dw}{dz} + p(z)\,w = 0$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek az origóban lényegesen szinguláris pontja van, ha

$$p(z) = \frac{m\,a_1}{z^m} + \frac{(m-1)\,a_2}{z^{m-1}} + \ldots + \frac{a_m}{z} - \varrho - \Phi(z) \quad (a_1 \neq 0;\ m \geqq 1)$$

alakú, ahol is $\Phi(z)$ reguláris $z = 0$-ban [és $\Phi(0) = 0$]. Az egyenlet általános megoldása:

$$w = C \cdot e^{Q_m(z)} \cdot z^{\varrho}\,\Phi^*(z)$$

alakú, ahol $Q_m(z) = \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu\, z^{\nu-m-1}$ és $\Phi^*(z) = e^{\int \frac{\Phi(z)}{z}\,dz}$.

Ez indít bennünket arra, hogy ebben a speciális — majd az általános — esetben is a $v(z)$ új függő változót vezessük be a

$$w(z) = e^{Q(z)} \cdot v(z)$$

reláció révén, ahol is $Q(z)$ ebben az esetben a fenti polinom (ti. $\frac{1}{z}$ polinomja), általános esetben pedig olyan — meghatározandó — polinom, hogy a v-re adódó egyenletnek a tekintett pontban nem-lényeges szingularitása vagy legalábbis $z^{\varrho}\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu\, z^\nu$ típusú megoldása. Valóban a fenti speciális esetben a

$$z\frac{dv}{dz} = \{\varrho + \Phi(z)\}\,v$$

egyenlet adódik, amelynek $z = 0$-ban már — láthatóan — csak nem-lényeges szingularitása van.

Ha az általános esetben létezik olyan $Q(z)$ polinom (ha a lényegesen szinguláris pont a $z = z_0$ helyen van, Q az $\frac{1}{z - z_0}$ argumentum, ha viszont a végtelenben, Q a z argumentum polinomja !), hogy a

$$w(z) = e^{Q(z)} \cdot v(z)$$

relációval bevezetett új differenciálegyenletnek a tekintett pontban már csak nem-lényeges szingularitása vagy legalábbis $(z - z_0)^{\varrho}\sum_{0}^{\infty} c_\nu (z - z_0)^\nu$ típusú megoldása van, akkor e pontot, illetve az így adódó megoldásokat *normális lényegesen szinguláris* pontoknak, illetve *normális megoldásoknak*, $Q(z)$-t *determináló faktor*nak, ϱ-t pedig *karakterisztikus exponens*nek nevezzük.

A gyakorlatban a tekintett lényegesen szinguláris pontot a $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ transzformációval általában a végtelenbe szoktuk transzformálni (így ti. az esetleg adódó aszimptotikus sor is megfelelően jellemzi a megoldást).

μ) **Periodikus, illetve kettős-periódusú együtthatók esetének vizsgálata**

Lényegében ugyanazokkal a módszerekkel, mint amelyeket a 6. § *b) α)—δ)* pontokban bemutattunk, eldönthető, hogy a periodikus, illetve kettős periódusú együtthatókkal képezett lineáris homogén differenciálegyenletek rendelkeznek-e periodikus, illetve kettős periódusú megoldásrendszerrel, továbbá, hogy milyen függvénytani tulajdonságokkal rendelkeznek e megoldásrendszerek. A részletekre csak a feladatok között térünk ki.

c) Vonalintegrál alakú megoldások meghatározása

Sok szempontból előnyös — különösen az aszimptotikus vizsgálatok elvégzésénél (l. a 2. § *e) γ)* pontot) —, ha a lineáris differenciálegyenlet megoldását paraméteres vonalintegrál alakjában tudjuk megadni. Az alábbiakban két módszert mutatunk be:

α) **Az általánosított Laplace-transzformáció**

A lineáris differenciálegyenlet megoldását ez esetben

$$w(z) = \int_{(C)} v(\zeta)\, e^{z\zeta}\, d\zeta$$

alakban keressük, amikor is $v(\zeta)$ és a (z-től független) C integrációs út meghatározása révén kell a konkrét egyenletet megoldanunk.

A tényleges megoldásnál helyettesítés után a differenciálás és integrálás sorrendjét formálisan felcseréljük, parciális integrálások révén az integrandust lehetőleg egyszerűsítjük; $v(\zeta)$ meghatározása ezután az integrandus zérussá tétele alapján — általában differenciálegyenletet kapunk — történik (homogén egyenletbe helyettesítettünk !), a C görbére pedig $v(\zeta)$ ismeretében — a parciális integrálásnál nyert — kiintegrált részek zérussá tételénél kapunk feltételt.

Minthogy a számítás formális, utólagosan kell jogosságát igazolnunk.

Ez úton nem mindig kaphatjuk meg a teljes megoldásrendszert (nem mindegyik alapmegoldásnak létezik a $v(\zeta)$ LAPLACE-transzformáltja).

Különösen egyszerűvé válnak a számítások, ha sikerül a differenciálegyenletet úgy transzformálnunk, hogy valamennyi együttható lineáris függvény legyen.

β) **A Jordan-féle megoldás**

A

$$Q(z)\, w'' + L(z)\, w' + K\, w \equiv 0$$

másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása előállítható általában a

$$w = \int_{(C)} \varphi(\zeta) \cdot (\zeta - z)^{\lambda+1}\, d\zeta$$

alakban, ha Q, L, illetve K legfeljebb másod-, első-, illetve nulladfokú polinom. A konkrét megoldás a λ szám, φ függvény és C görbe meghatározását jelenti.

A részletekkel a feladatok között foglalkozunk.

d) Kvalitatív vizsgálatok

A differenciálegyenletek megoldásait általában nem tudjuk zárt alakban előállítani; épp ezért nagyon fontos, hogy e függvények jellemző sajátosságait magából a differenciálegyenletből olvassuk le. Különösen a jellemző függvényegyenletek megállapítása

fontos, továbbá a függvény, illetve deriváltjai zérushelyeinek elhelyezkedése. Ez utóbbival a következő paragrafusban foglalkozunk.

α) **A jellemző függvényegyenletek**

Elsősorban a következő függvényegyenleteket szoktuk vizsgálni: milyen típusú addíciós, illetve multiplikációs függvényegyenleteket elégítenek ki a differenciálegyenlet megoldásai; milyen egyszerű kapcsolat érvényes (a definiáló differenciálegyenleten kívül) a megoldás és deriváltjai között?

E vizsgálatok oly nehezek, hogy még a lineáris egyenletekkel kapcsolatban sem adható meg általános módszer. Vagy a megoldás hatványsorát, vagy közvetlenül a differenciálegyenletet, vagy ennek vonalintegrál alakú megoldását, gyakran mindezeket együtt kell vizsgálnunk. Néha némi támaszpontot nyújt a

β) **Generátorfüggvény**

Lineáris differenciálegyenletek esetén gyakran nem egyetlen differenciálegyenlet, hanem egy — szabad paramétert tartalmazó — differenciálegyenlet-család megoldásait, illetve ezek egymással való kapcsolatát vizsgáljuk. Ilyenkor a megoldásfüggvényeket a paraméterrel indexeljük, azaz pl. a

$$w'' + p(z;\lambda)\,w' + q(z;\lambda)\,w \equiv 0$$

egyenlet megoldását $w_\lambda(z)$-vel jelöljük. Ez esetben a kétváltozós

$$G(z;\zeta) \equiv \sum_{\lambda=\begin{cases}0\\-\infty\end{cases}}^{\infty} \zeta^\lambda w_\lambda(z)$$

függvényt (ha az a $\zeta = 0$ pont körüli valamely körgyűrűben reguláris) *generátorfüggvény*nek nevezzük. Ennek ismeretében az egészindexű megoldások tulajdonságai általában elég könnyen megállapíthatók. E tulajdonságok — minthogy ilyen értelemben az egész számok nincsenek különösképpen kitüntetve — általában a többi függvényre is jellemzőek, s ez — legalább — támpontot ad a vizsgálathoz.

Példák és feladatok

a)

α)

1. Igazoljuk a szukcesszív approximáció módszerének segítségével, hogy a

$$\frac{dw_i}{dz} = \sum_{k=1}^{n} Z_{i,k}(z)\,w_k(z); \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszer bármely $\{w_i(z_0) = \alpha_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldásrendszere létezik, és reguláris z_0-ban, ha az (ti. z_0) reguláris pontja az egyenletrendszernek.

Útbaigazítás: Egyszerű eltolással ($\zeta + z_0 = z$) átvihetjük a z_0 pontot az origóba anélkül, hogy a regularitás feltétele bármit változna. Ezért feltételezhetjük, hogy $z_0 = 0$. Így a $||Z_{i,k}||$ mátrix reguláris az origóban, azaz megadható olyan $R > 0$ szám, hogy a $Z_{i,k}(z)$ függvények valamennyien regulárisak a $|z| \leqq R$ *zárt* körlemezen, ott tehát abszolút értékük közös K korlát alatt marad.

A szukcesszív approximáció módszerét alkalmazva, szukcesszíve, lépésről lépésre számítjuk a megoldásrendszer közelítő függvényrendszerét:

$$w_{i;0}(z) = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$w_{i;m+1}(z) = \int_0^z \left[\sum_{k=1}^{n} Z_{i;k}(t) \cdot w_{k;m}(t)\right] dt + \alpha_i; \quad |z| \leqq R;$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots).$$

A $|z| \leqq R$ feltételre tekintettel indukcióval igazolhatjuk, hogy valamennyi közelítésrendszer reguláris $|z| \leqq R$-ben. Integrációs útnak választhatjuk az összekötő egyenest.

WEIERSTRASS-tétele értelmében mármost csak azt kell igazolnunk, hogy pl. a $|z| = R$ görbén egyenletesen konvergál a közelítésrendszer. Ehelyett a vele ekvivalens

$$w_{i;0}(z) + [w_{i;1}z) - w_{i;0}(z)] + [w_{i;2}(z) - w_{i;1}(z)] + \ldots$$

sorrendszer egyenletes abszolút konvergenciáját mutatjuk ki, mert e sor tagjai lépésről lépésre igen egyszerűen becsülhetőek. Ha ti. a $\max_i |\alpha_i| = \alpha$ jelölést bevezetjük, akkor — ez könnyen belátható — érvényes a következő becslés:

$$|w_{i;s+1}(z) - w_{i;s}(z)| \leqq \alpha \frac{(n K R)^S}{S!} \qquad (|z| \leqq R)$$

amiből a WEIERSTRASS-kritérium, illetve a WEIERSTRASS-tétel alapján állításunk (egyszersmind az is, hogy a megoldásrendszer legalábbis a $|z| \leqq R$ körben reguláris) következik.

2. A

$$w'' = p(z) \cdot w' + q(z)\, w$$

egyenletnek legyen $z = \zeta$ reguláris pontja. Igazoljuk majoránsmódszerrel, hogy az egyenlet bármely $[\{w(\zeta) = \alpha;\ w'(\zeta) = \beta\}$ kezdeti feltételekhez tartozó] megoldása reguláris $z = \zeta$-ban.

Útbaigazítás: A differenciálegyenletből α és β ismeretében közvetlenül leolvasható $w''(\zeta)$ értéke, a jobboldal $(k-2)$-szeri (formális) deriválásával pedig általában $w^{(k)}(\zeta)$ is. Így (formálisan) megkonstruálható $w(z)$ ζ hely körüli TAYLOR-sora. Mármost az így kapott sort helyettesítve a differenciálegyenletbe, az azt (formálisan) kielégíti, s így csak azt kell igazolnunk, hogy e sor valamely $|z - \zeta| \leqq \varrho$ $(\varrho > 0)$ körben konvergál.

Ez p és q majorálásával történik. Ugyanis p és q biztosan regulárisak valamely $|z - \zeta \leqq |\varrho$ körben. A körkerületen abszolút értékük maximumát P-vel, illetve Q-vel jelölve, érvényesek az alábbi majoránsrelációk (l. a 2. § e) γ) 1. feladatot):

$$\left|\frac{d^n p}{dz^n}\right|_{z=\zeta} \leqq \frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{P}{1 - \dfrac{z-\zeta}{\varrho}}\right\}_{z=\zeta}; \qquad \left|\frac{d^n q}{dz^n}\right|_{z=\zeta} \leqq \frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{Q}{1 - \dfrac{z-\zeta}{\varrho}}\right\}_{z=\zeta}.$$

E majoránsokat a differenciálegyenletben p, illetve q helyébe téve, az új differenciálegyenlet zárt alakban megoldható, és a kezdeti feltételeket kielégítő megoldása reguláris $z = \zeta$-ban, sőt a $|z - \zeta| < \varrho$ körben is.

Azt kell tehát csak igazolnunk — s ez lényegében ismét hasonló módszerekkel történik, mint a 2. § *e)* γ) 1. feladatban —, hogy az új egyenlet W megoldása majoránsa az eredeti w megoldásának, azaz

$$w(\zeta) = W(\zeta) = \alpha; \quad w'(\zeta) = W'(\zeta) = \beta; \quad \left|\frac{d^n w}{dz^n}\right|_{z=\zeta} \leqq \frac{d^n}{dz^n}\{W\}_{z=\zeta}; \quad (n > 2).$$

3. Mi a feltétele annak, hogy a

$$w'' + p(z)\, w' + q(z)\, w = 0$$

differenciálegyenletnek a végtelen távoli pont reguláris pontja legyen? Hogyan lehet a reguláris esetben a végtelen távoli pont körül a megoldást sor alakjában meghatározni?

4. Reguláris pontja-e a LEGENDRE-féle

$$(1 - z^2)\, w'' - 2\, z\, w' + n(n + 1)\, w = 0$$

egyenletnek az origo? Határozzuk meg a $w(0) = 1$; $w'(0) = 0$ feltételeket kielégítő megoldást. Milyen kezdeti feltételek mellett kapunk polinom-megoldást?

5. Határozzuk meg a

$$w'' + z\, w = 0$$

differenciálegyenlet $w(0) = 1$; $w'(0) = 0$, illetve $w(0) = 0$; $w'(0) = 1$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldását hatványsor alakban.

6. Adjuk meg hatványsor alakban az alábbi differenciálegyenletek $w(0) = 1$; $w'(0) = 0$, illetve $w(0) = 0$; $w'(0) = 1$ feltételeket kielégítő megoldását:

a) $(1 - z^3)\, w'' - z^2\, w' + z\, w = 0$;

b) $(z - 1)(z - 2)\, w'' - (2z - 3)\, w' + 2w = 0$;

c) $w'' - (1 + z)\, w' - w = 0$.

7. Adjuk meg hatványsor alakban az alábbi differenciálegyenletek megoldását a reguláris végtelen távoli pont környezetében:

a) $z^4\, w'' = (1 - 2z)\, z^2\, w' + 2w$;

b) $z^4\, w'' + 2z^3\, w' + a^2\, w = 0$;

c) $z^2(z^2 - 1)\, w'' + 2z(z^2 + 1)\, w' - 2w = 0$.

Útbaigazítás: a $z = \dfrac{1}{\zeta}$ helyettesítés a végtelen távoli pont környezetét az origóba viszi át.

$\beta-\gamma$) **1.** Igazoljuk, hogy a

$$\frac{dw_i}{dz} = \sum_{k=1}^{n} Z_{i;k}(z)\, w_k(z) \qquad (i = 1;\ 2;\ \ldots;\ n)$$

lineáris egyenletrendszernek a z_0 reguláris pontban csak egyetlen olyan megoldásrendszere van, amely a $\{w_i(z_0) = 0;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ feltételrendszert kielégíti, éspedig a $\{w_i(z) \equiv 0;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ triviális megoldásrendszer.

2. Bizonyítsuk be, hogy a

$$w'' + p(z) \cdot w' + q(z) \cdot w = 0$$

differenciálegyenlet bármely 3 megoldása $(w_1;\ w_2;\ w_3)$ lineárisan nem független a $z = \zeta$ reguláris pont környezetében.

Útbaigazítás: Mindig található 3 olyan állandó: c_1, c_2 és c_3, hogy (ζ rögzített !) a

$$c_1 w_1(\zeta) + c_2 w_2(\zeta) + c_3 w_3(\zeta) = 0$$

$$c_1 w_1'(\zeta) + c_2 w_2'(\zeta) + c_3 w_3'(\zeta) = 0$$

egyenletek teljesüljenek. Minthogy a $w(z) \equiv c_1 w_1(z) + c_2 w_2(z) + c_3 w_3(z)$ függvény megoldás (homogén lineáris egyenletről lévén szó !), amelynek a $z = \zeta$ pontban kétszeres gyöke van, azért az előző (1.) feladat eredményei alapján következik, hogy $w(z) \equiv 0$ a $z = \zeta$ reguláris pont környezetében. Épp ezt kellett igazolnunk.

3. Az n ismeretlenű homogén lineáris

$$\frac{dw_i}{dz} = \sum_{k=1}^{n} Z_{i,k}(z) \cdot w_k(z); \qquad (i = 1, 2, \ldots, n$$

egyenletrendszer, illetve a

$$\frac{d^n w}{dz^n} = \sum_{k=1}^{n} Y_k(z) \frac{d^{n-k} w}{dz^{n-k}}$$

n-ed rendű homogén lineáris egyenlet $z = \zeta$ reguláris pontbeli *alapmegoldás-rendszerének* nevezzük a

$$\{w_{i,k}(z)\}, \quad \text{illetve a} \quad \{w_k(z)\}; \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

függvényrendszert, ha ezek mindegyike reguláris a $z = \zeta$-ban, e pont valamely környezetében valamennyi azonosan kielégíti a rendszert, illetve az egyenletet, továbbá

$$\begin{vmatrix} w_{1,1}(\zeta) & w_{1,2}(\zeta) \ldots & w_{1,n}(\zeta) \\ w_{2,1}(\zeta) & w_{2,2}(\zeta) \ldots & w_{2,n}(\zeta) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{n,1}(\zeta) & w_{n,2}(\zeta) & w_{n,n}(\zeta) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{illetve} \quad \begin{vmatrix} w_1(\zeta) & w_2(\zeta) \ldots & w_n(\zeta) \\ w_1'(\zeta) & w_2'(\zeta) \ldots & w_n'(\zeta) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ w_1^{(n-1)}(\zeta) & w_2^{(n-1)}(\zeta) \ldots & w_n^{(n-1)}(\zeta) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy az alapmegoldás-rendszer lineárisan független függvényrendszer, továbbá, hogy az előbb felírt determinánsok egyetlen olyan $z = z_0$ reguláris pontban sem válhatnak zérussá, amely z_0 pont összeköthető ζ-val egy csupa reguláris pontból álló görbe segítségével.

Útbaigazítás: Az itt felírt determinánsok egyszerű összefüggésben állanak a rendszer, illetve az egyenlet együtthatóival. Ebből az összefüggésből az igazolandó állítások könnyen leolvashatóak.

4. Határozzuk meg azt a másodrendű homogén lineáris egyenletet, amelynek egyik alapmegoldás-rendszere:

$$w_1 \equiv z; \quad w_2 \equiv 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{1 \cdot z^4}{4!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot z^6}{6!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5\, z^8}{8!} + - \ldots$$

Megoldás: A

$$w'' = p(z)\, w' + q(z)\, w$$

homogén lineáris differenciálegyenlet bármely $(w_1; w_2)$ alapmegoldás-rendszerébő[1] képezett

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix}; \quad \Delta'(z) = \Delta_1(z) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1'' & w_2'' \end{vmatrix}; \quad \Delta_2(z) = \begin{vmatrix} w_1' & w_2' \\ w_1'' & w_2'' \end{vmatrix}$$

WRONSKY-determinánsai és együtthatói között fennállanak — bármely reguláris pontban — az alábbi összefüggések:

$$p(z) = \frac{\Delta_1(z)}{\Delta(z)}; \qquad q(z) = -\frac{\Delta_2(z)}{\Delta(z)}.$$

Esetünkben tehát:

$$p(z) = \frac{z\, w_2''}{z\, w_2' - w_2} =$$

$$= \frac{z - \frac{z^3}{2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot z^5}{4!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot z^7}{6!} + - \ldots}{z^2 - \frac{z^4}{3!} + \frac{1 \cdot 3\, z^6}{5!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot z^8}{7!} + - \ldots - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot z^6}{6!} + - \ldots} =$$

$$= \frac{z - \frac{z^3}{2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot z^5}{4!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot z^7}{6!} + - \ldots}{-1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot z^4}{4!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot z^6}{6!} - + \ldots} \equiv -z;$$

$$q(z) = -\frac{w_2''}{z\, w_2' - w_2} = -\frac{1}{z}\, p(z) \equiv 1.$$

A másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet tehát:

$$w'' = -z\, w' + w.$$

5. Határozzuk meg azt a másodrendű, homogén lineáris differenciálegyenletet, amelynek egyik alapmegoldás-rendszere:

a) $w_1 \equiv 1 + z^2; \quad w_2 = z + \frac{z^3}{1 \cdot 3} - \frac{z^5}{3 \cdot 5} + \frac{z^7}{5 \cdot 7} - + \ldots;$

b) $w_1 \equiv z; \; w_2 \equiv e^z.$

6. Tegyük fel, hogy a $w(z)$ függvény kielégít egy

$$w^n + a_2(z) \cdot w^{n-2} + \ldots + a_n(z) = 0$$

típusú algebrai egyenletet, amelynek $a_k(z)$ együtthatói z polinomjai. Igazoljuk, hogy ez esetben $w(z)$ egy $(n-1)$-ed rendű lineáris homogén differenciálegyenletet is kielégít, amelynek együtthatói z racionális függvényei.

7. Az $u(z)$ és $w(z)$ meromorf függvények között fennáll a

$$w^3 + 3w \equiv u$$

kapcsolat. Igazoljuk, hogy w kielégíti a következő lineáris differenciálegyenletet:

$$w'' + \left\{\frac{u\,u'}{u^2+4} - \frac{u''}{u'}\right\} w' - \frac{1}{9}\,\frac{u'^2}{u^2+4}\,w = 0.$$

b)

α—β) **1.** Tekintsük a

$$w^{(n)} = a_{n-1}(z)\,w^{(n-1)} + a_{n-2}(z)\,w^{(n-2)} + \ldots + a_1(z)\,w' + a_0(z)\,w$$

n-ed rendű homogén lineáris differenciálegyenletet, és igazoljuk, hogy a z_0 pont akkor és csakis akkor nem-lényegesen szinguláris pontja az egyenletnek, ha az $a_{n-k}(z)$ együtthatónak $(k = 1, 2, \ldots, n)$ legfeljebb k-ad rendű pólusa van $z = z_0$-ban.

Útbaigazítás: A feltétel szükségessége könnyen adódik a megoldásrendszerek és együtthatók közötti ismert összefüggések felhasználásával.

Az elégségesség kimutatása viszont a formális $\left[(z-z_0)^{\varrho}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu\right]$ alakú megoldás megkeresése, majd annak igazolása révén történhet, hogy a kapott függvénysor a z_0 körüli megfelelő körgyűrűben egyenletesen konvergál. Ez utóbbi pedig — némi ügyeskedés árán — a majorálás módszerének felhasználásával történhet.

2. Tegyük fel, hogy a

$$w'' + p(z)\,w' + q(z)\,w = 0$$

differenciálegyenletnek a $z_0 = 0$ pontban nem-lényeges szingularitása van.

Jelöljük a továbbiakban $w(z;\varrho)$-val a $z^\varrho \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(\varrho)\,z^\nu$ sort, ahol a $c_\nu(\varrho)$ együtthatókat $(\nu = 1, 2, \ldots)$ az ismert

$$c_1 f_0(\varrho+1) + c_0 f_1(\varrho) = 0$$

$$\cdots$$

$$c_n f_0(\varrho+n) + c_{n-1} f_1(\varrho+n-1) + \ldots + c_1 f_{n-1}(\varrho+1) + c_0 f_n(\varrho) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

egyenletrendszer segítségével határoztuk meg (de ahol nem végeztük el a $\varrho = \varrho_1$, illetve $\varrho = \varrho_2$ karakterisztikus exponens helyettesítést).

Igazoljuk, hogy a

$$w_1(z) = w(z;\ \varrho_1);\ w_2(z) = \frac{\partial}{\partial \varrho} w(z;\ \varrho)\Big|_{\varrho=\varrho_1}$$

függvénypár alapmegoldás-rendszert szolgáltat, ha az

$$f_0(\varrho) = 0$$

alapegyenletnek $\varrho = \varrho_1$ kétszeres gyöke.

Megoldás: Elsősorban is megjegyezzük, hogy a $w_1 = w(z;\ \varrho_1)$ (alap)megoldás léte triviális állítás. Azt kell tehát csak igazolnunk, hogy

a) $w_2(z) = \frac{\partial}{\partial \varrho} w(z;\ \varrho)_{\varrho=\varrho_1}$

is megoldás és

b) lineárisan független w_1-től.

Ad *a)*. A differenciálegyenlet ilyen alakban írható fel:

$$z^2 w'' = z\,\Phi(z)\,w' + \psi(z)\,w,$$

ahol is $\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ és $\psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu$ regulárisak az origo környezetében. A $w = z^\varrho \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ helyettesítése révén kaptuk egyrészt az alapegyenletet, másrészt az $(n = 1, 2, \ldots)$

$$c_n\{(\varrho + n)(\varrho + n - 1) - a_0(\varrho + n) - b_0\} - c_{n-1}\{a_1(\varrho + n - 1) + b_1\} - \ldots$$
$$\ldots - c_0\{a_n \varrho + b_n\} = 0$$

egyenletrendszert. $w(z;\ \varrho)$ hatványsorának együtthatóit mármost éppúgy állapítottuk meg, hogy — éspedig ϱ *bármely* értéke mellett — az alapegyenlet kivételével ezen egyenletek valamennyien kielégülnek. Azonnal leolvasható az is, hogy — ha az alapegyenlet gyökeit ϱ_1 és ϱ_2-vel jelöljük — a $c_n(\varrho)$ együtthatók ϱ reguláris függvényei bármely olyan többszörösen összefüggő tartományban, amely nem tartalmazza a $\varrho_k = \varrho_1 - k$ és $\varrho_k^* = \varrho_2 - k$ pontokat, $(k = 1, 2, \ldots)$.

A majorálás módszerével könnyen igazolható, hogy a $w(z;\ \varrho)$ függvényt előállító sor bármely olyan — többszörösen összefüggő — ϱ-tartományban, amely nem tartalmazza a ϱ_k és ϱ_k^* pontokat, a $|z| \leqq R' < R$ feltétel mellett ϱ-ban *egyenletesen* konvergál, ahol is R olyan pozitív szám, hogy a $|z| \leqq R$ zárt körlemezen $\Phi(z)$ és $\psi(z)$ reguláris függvények. Ha ti. a $\max_{|z|=R} |\Phi(z)| = \Phi$; $\max_{|z|=R} |\psi(z)| = \Psi$ jelöléseket bevezetjük, érvényesek az alábbi becslések:

$$|a_n| \leqq \frac{\Phi}{R^n};\qquad |b_n| \leqq \frac{\Psi}{R^n};$$

$$|a_n(\varrho + r) + b_n| \leqq \{\Phi \cdot |\varrho + r| + \Psi \cdot\} \frac{1}{R^n}.$$

Így tehát a

$$\gamma_n(\varrho) = \frac{\left\{|c_{n-1}|\frac{\Phi|\varrho+n-1|+\Psi}{R}+|c_{n-2}|\frac{\Phi\cdot|\varrho+n-2|+\Psi}{R^2}+\ldots+|c_0|\frac{\Phi|\varrho|+\Psi}{R^n}\right\}}{|(\varrho+n)(\varrho+n-1)-a_0(\varrho+n)-b_0|}$$

jelölést bevezetve, nyilván

$$\gamma_n(\varrho) \geqq |c_n(\varrho)|.$$

Könnyen leolvasható mármost, hogy

$$\gamma_{n+1}(\varrho)|(\varrho+n+1)(\varrho+n)-a_0(\varrho+n+1)-b_0| -$$

$$-\frac{\gamma_n(\varrho)}{R}|(\varrho+n)(\varrho+n-1)-a_0(\varrho+n)-b_0| =$$

$$= |c_n|\frac{\Phi|\varrho+n|+\Psi}{R} \leqq \gamma_n(\varrho)\frac{\Phi|\varrho+n|+\Psi}{R},$$

azaz

$$\frac{\gamma_{n+1}(\varrho)}{\gamma_n(\varrho)} \leqq \frac{|(\varrho+n)(\varrho+n-1)-a_0(\varrho+n)-b_0|+\Phi|\varrho+n|+\Psi}{|(\varrho+n+1)(\varrho+n)-a_0(\varrho+n+1)-b_0|\cdot R}$$

amiből állításaink — lévén $\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \leqq \frac{1}{R}$ — könnyen leolvashatók.

Minthogy pedig $w(z;\varrho)$ együtthatói, a $c_n(\varrho)$ számok az alapegyenlet kivételéve valamennyi adódó egyenletet kielégítik, azért a $w(z;\varrho)$, illetve a $\frac{\partial}{\partial\varrho}w(z;\varrho)$ függvény bármely olyan ϱ tartományban, amely nem tartalmazza a $\{\varrho_k\}$ és $\{\varrho_k^*\}$ pontok egyikét sem, a $|z| \leqq R' < R$ feltétel mellett kielégíti a

$$z^2 w'' - z\Phi(z)w' - \psi(z)w = z^{\varrho}\cdot c_0(\varrho-\varrho_1)(\varrho-\varrho_2),$$

illetve a

$$z^2\frac{d^2}{dz^2}\left\{\frac{\partial w}{\partial\varrho}\right\} - z\Phi(z)\frac{d}{dz}\left\{\frac{\partial w}{\partial\varrho}\right\} - \psi(z)\left\{\frac{\partial w}{\partial\varrho}\right\} =$$

$$= z^{\varrho}\cdot c_0\{\ln z(\varrho-\varrho_1)(\varrho-\varrho_2)+(\varrho-\varrho_1)+(\varrho-\varrho_2)\}$$

egyenletet.

Innét azonnal leolvasható, hogy $w(z;\varrho_1)$ is, $w(z;\varrho_2)$ is, továbbá a $\varrho_1=\varrho_2$ feltétel mellett $\frac{\partial}{\partial\varrho}[w(z;\varrho)]_{\varrho=\varrho_1}$ is kielégíti az eredeti differenciálegyenletet. Ezzel *a)* alatti állításunkat igazoltuk.

Ad *b)*. Minthogy

$$w_1 = z^{\varrho_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

azért egyrészt

$$w_2 = \frac{\partial}{\partial \varrho} w\Big|_{\varrho=\varrho_1} = w_1 \cdot \ln z + z^{\varrho_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{\partial c_\nu}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=\varrho_1} \cdot z^\nu,$$

másrészt közvetlenül leolvasható, hogy a logaritmikus tagot is tartalmazó w_2 nem lehet w_1-től — amely ilyet nem tartalmaz — lineárisan függő, bármilyen alakú legyen is w_2 második tagja (ti. ez $\ln z$ típusú faktort szintén nem tartalmazhat).

3. Általánosítsuk az előző (2.) feladatban igazolt eredményeket, azaz mutassuk meg egyrészt azt, hogy az n-ed rendű homogén, lineáris egyenlet, illetve a megfelelő egyenletrendszer esetén is érvényes az az állítás, hogy az alapegyenlet $\varrho = \varrho_1$ gyökéhez, amennyiben az k-szoros gyök, az egymástól — és a többi karakterisztikus exponenshez tartozó megoldástól — lineárisan független

$$w(z;\ \varrho_1);\ \frac{\partial}{\partial \varrho}\,[w(z;\ \varrho)]_{\varrho=\varrho_1};\ \ldots\ ;\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial \varrho^{k-1}}\,[w(z;\ \varrho)]_{\varrho=\varrho_1}$$

megoldásrendszer rendelhető hozzá.

Igazoljuk továbbá, hogy a 2. feladatban tárgyalt másodrendű egyenlet esetében akkor is alapmegoldás-rendszert ad a

$$w_1 = w(z;\ \varrho_1) \qquad \text{és} \qquad w_2 = \frac{\partial}{\partial \varrho}\,[w(z;\ \varrho)]_{\varrho=\varrho_1}$$

függvénypár, ha az alapegyenletnek $\varrho = \varrho_1$ nem kétszeres gyöke, de $\varrho_2 = \varrho_1 \pm m$, ahol m természetes szám.

Általánosítsuk ez utóbbi tételt is az n-ed rendű egyenlet, illetve az egyenletrendszer esetére!

Útbaigazítás: Csak azt az apró kis fogást akarjuk megmutatni, amivel igazolható — a 2. feladathoz csatlakozva — hogy $\frac{\partial}{\partial \varrho}\, w(z;\ \varrho)$ is kielégíti az eredeti egyenletrendszert akkor is, ha az alapegyenlet második gyöke: $\varrho_2 = \varrho_1 \pm m$. Ugyanis c_0-t a $w(z;\ \varrho)$ függvény definíciójakor tetszőlegesen, speciálisan tehát ϱ-tól függően is választhatjuk, pl. $C \cdot (\varrho - \varrho_1) = c_0$-nak is. Ilyen választás mellett konstruálva meg a $w(z;\ \varrho)$ függvényt, azaz a $\{c_n(\varrho)\}$ együttható-rendszert, $w(z;\ \varrho)$ kielégíti a

$$z^2 w'' - z\,\Phi(z)\,w' - \psi(z)\,w = z^\varrho\, C \cdot (\varrho - \varrho_1)^2\,(\varrho - \varrho_2)$$

differenciálegyenletet, aminek alapján a továbbiak már könnyen igazolhatók.

4. Tekintsük a

$$z^2 w'' + z\,w' + (z^2 - \lambda^2)\,w = 0$$

(homogén) BESSEL-féle differenciálegyenletet, határozzuk meg szinguláris pontjainak típusát és a nem-lényeges szinguláris pontok környezetében adjunk meg egy alapmegoldás-rendszert.

Megoldás: Közvetlenül leolvasható (természetesen a legmagasabb rendű derivált együtthatójával történő osztás után), hogy az egyenletnek két szinguláris pontja van: egyik a $z = 0$ helyen — ez nyilván nem-lényeges szingularitású — a másik pedig a végtelenben. Könnyen belátható — pl. úgy, hogy a $z = \frac{1}{\zeta}$ transzformációval ezt az origóba képezzük le — hogy itt viszont lényegesen szinguláris ponttal rendelkezik az egyenlet.

Így tehát az origo környezetében egy $z^{\varrho} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ típusú függvénnyel biztosan kielégíthetjük az egyenletet. A helyettesítés után — vagy közvetlenül a bevezetésben megadott egyenletrendszert felírva — az alábbi egyenletek adódnak az ismeretlen ϱ index, illetve a $\{c_\nu\}$ együttható-rendszer megállapításához;

az alapegyenlet: $c_0(\varrho^2 - \lambda^2) = 0;$
a többi egyenlet: $c_1[(\varrho + 1)^2 - \lambda^2] = 0,$
illetve általában $c_\nu[(\varrho + \nu)^2 - \lambda^2] + c_{\nu-2} = 0; \qquad (\nu = 2, 3, \ldots).$

Az alapegyenlet megoldásai tehát:

$$\varrho_1 = \lambda; \quad \varrho_2 = -\lambda.$$

A speciális $\lambda = 0$ esetben a két gyök egybeesik, ekkor tehát az egyik alapmegoldás tartalmaz logaritmikus tagot. Ha viszont λ^2 egész szám négyzete, vagy pedig páratlan szám felének négyzete, akkor az alapegyenlet két gyökének különbsége egész szám. Látni fogjuk, hogy az előbbi esetben (λ egész) az egyik alapmegoldás tartalmaz logaritmikus tagot, utóbbi esetben viszont nem, mert ekkor a bevezetésben említett speciális esettel állunk szemben.

Mármost a második egyenletből következően $c_1 = 0$, és így az általános egyenlet egyszerű következményeként bármely páratlan indexű együttható is 0-nak adódik. (Ez az oka annak, hogy a $\varrho_1 = \lambda = k + \frac{1}{2}$ — ahol k természetes szám vagy 0 — esetben a másik alapmegoldás sem tartalmaz logaritmikus tagot; ha ugyanis a $\varrho_2 = -k - \frac{1}{2}$ helyettesítéssel próbáljuk ez esetben megoldani az egyenletrendszert, az az egyenlet — a $\nu = 2k + 1$ indexhez tartozó —, amelyben a zérus értékű együttható fellép, páratlan indexű, és így erre teljesül a bevezetésben megadott

$$c_{m-1} f_1(\varrho_1 - 1) + c_{m-2} f_2(\varrho_1 - 2) + \ldots + c_0 f_m(\varrho_1 - m) = (c_{2k-1} =) = 0$$

feltétel. A $\varrho_1 = \lambda = k$ esetben viszont a zérus értékű együttható páros indexű egyenletben lép fel.) Amennyiben tehát λ^2 nem zérus, illetve, nem egyenlő egy természetes szám négyzetével, valamennyi együttható szukcesszíve kiszámítható; c_0-t szabadon választhatjuk meg (homogén, lineáris egyenletről van szó, c_0 pedig multiplikatív faktorként szerepel a többi együtthatóban); célszerű, ha úgy választjuk, hogy az alapmegoldás a lehető legegyszerűbbnek adódjék. Így

$$c_{2\nu} = -\frac{c_{2\nu-2}}{(\varrho + 2\nu)^2 - \lambda^2} = \ldots = (-1)^\nu \frac{c_0}{\prod_{k=1}^{\nu}[\varrho + 2\nu - \lambda] \cdot \prod_{k=1}^{\nu}[\varrho + 2\nu + \lambda]}.$$

A $\varrho = \lambda > 0$ esetben tehát ($\lambda \neq k$; $k = 0, 1, 2, \ldots$):

$$c_{2\nu} = \frac{(-1)^\nu c_0}{2^\nu \prod_{k=1}^{\nu} k \cdot 2^\nu \prod_{k=1}^{\nu} (k+\lambda)} = \frac{(-1)^\nu \Gamma(\lambda+1) \cdot c_0}{2^{2\nu} \Gamma(\nu+1) \Gamma(\lambda+\nu+1)},$$

és így ez esetben a $c_0 = \frac{2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}$ választással kapunk egyszerű alapmegoldást, az ún. elsőfajú, λ-ad rendű BESSEL-függvényt:

$$J_\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\lambda+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2\nu},$$

míg a $\varrho = -\lambda$ esetben:

$$c_{2\nu} = \frac{(-1)^\nu \cdot c_0}{2^\nu \prod_{k=1}^{\nu} (k-\lambda) \cdot 2^\nu \prod_{k=1}^{\nu} k} = \frac{(-1)^k \Gamma(1-\lambda) \cdot c_0}{2^{2\nu} \Gamma(\nu+1) \Gamma(-\lambda+\nu+1)},$$

adódik, és így a $c_0 = [2^{-\lambda} \cdot \Gamma(-\lambda+1)]^{-1}$ választással adódik a másik egyszerű alapmegoldás, az első fajú, $-\lambda$-ad rendű BESSEL-függvény:

$$J_{-\lambda}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(-\lambda+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\lambda+2\nu}.$$

Tekintettel arra, hogy a differenciálegyenletnek a $z = 0$-n kívül csak a végtelen távoli pontban van szinguláris helye, ebből következően mindkét kapott sor szükségképp az egész számsíkon konvergál, és előállítják az alapmegoldás-rendszert. A $\lambda = k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) esetben viszont így csak egy megoldást kapunk, az ún. első fajú, k-ad rendű BESSEL-függvényt:

$$J_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(k+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu+k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ez esetben a másik megoldást — a 6. § *b)* α—β) 2., illetve 3. feladata alapján — a $\lambda = \varrho_1$ index szerinti deriválással kaphatjuk; így jutunk el az ún. másodfajú, k-ad rendű BESSEL-függvényekre:

$$Y_k(z) = \frac{\partial}{\partial\lambda} J_\lambda(z)\Big|_{\lambda=k} = \ln z \cdot J_k(z) - \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(k-\nu-1)!}{\nu!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu-k} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(k+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu+k} \cdot [S(\nu) + S(k+\nu)]$$

ahol is $k > 0$ és $S(m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$; illetve

$$Y_0(z) = \frac{\partial}{\partial\lambda} J_\lambda(z)\Big|_{\lambda=0} = \ln z\, J_0(z) + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} \cdot S(2) + \frac{S(3)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} z^6 -$$

$$- \frac{S(4) \cdot z^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} + \ldots$$

5. Tekintsük a GAUSS-féle vagy *hipergeometrikus* differenciálegyenletet:

$$z(1-z)\,w'' + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)\,z\}\,w' - \alpha\beta\,w = 0.$$

Állapítsuk meg, hogy milyen típusúak az egyenlet szingularitásai és a nem-lényeges szingularitások környezetében határozzunk meg egy-egy alapmegoldás-rendszert.

A paraméterek milyen választása mellett kapunk polinom-megoldást?

6. Tekintsük az ún. *asszociált* LEGENDRE-féle differenciálegyenletet:

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + \left\{\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\right\} w = 0,$$

és válaszoljunk ugyanazokra a kérdésekre, mint az 5. feladatban.

Keressük meg azt az új W függő változót, amelyet helyettesítve az *asszociált* LEGENDRE-egyenletbe, az a (közönséges)

$$(1-z^2)\,W'' - 2z\,W' + \lambda(\lambda+1)\,W = 0$$

LEGENDRE-egyenletbe megy át.

7. Határozzuk meg az alább adott differenciálegyenletek egy-egy alapmegoldás-rendszerét a nem-lényegesen szinguláris $z = 0$ pont környezetében:

a) $2z^2 w'' + z w' - (1+z^2) w = 0$;
b) $z(1-z) w'' + (2-3z) w' - w = 0$;
c) $z w'' + w' - w = 0$;
d) $z w'' + (z-1) w' + w = 0$;
e) $4z^2 w'' + 4z w' - (z^2+1) w = 0$;
f) $z w'' + w' + m z w = 0$.

8. Határozzuk meg a következő differenciálegyenletek egy-egy alapmegoldás-rendszerét a nem-lényegesen szinguláris végtelen távoli pont környezetében:

a) $z^2 w'' + (a+3z) w' + w = 0$;
b) $z^3 w'' + (2+5z^2) w' + 4z w = 0$.

9. Keressük meg az alábbi differenciálegyenletek és a BESSEL-féle differenciál-egyenlet kapcsolatát, és adjuk meg az egyenletek megoldását:

a) $z w'' + w = 0$; *b)* $z^2 w'' - 2z w' + 4(z^2-1) w = 0$;

c) $z w'' + (2n+1) w' + z w = 0$.

10. Igazoljuk, hogy az *asszociált* LEGENDRE-féle differenciálegyenlet bármely megoldása felírható az alábbi alakban:

$$c_1 \sqrt{(z^2-1)^\mu} \cdot F\left(\frac{\mu-\lambda}{2};\ \frac{\mu+\lambda+1}{2};\ \frac{1}{2};\ z^2\right) +$$

$$+ c_2 \sqrt{(z^2-1)^\mu} \cdot F\left(\frac{\mu-\lambda+1}{2};\ \frac{\mu+\lambda+2}{2};\ \frac{3}{2};\ z^2\right).$$

γ—δ) 1. Igazoljuk, hogy a

$$w'' + p\,w' + q\,w = 0$$

egyenlet akkor és csakis akkor FUCHS-típusú, ha

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z - \alpha_k}, \qquad \text{illetve} \qquad q(z) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{B_k}{(z-\alpha_k)^2} + \frac{C_k}{z - \alpha_k} \right]$$

alakú, $\alpha_i \neq \alpha_j$, ha $i \neq j$, továbbá $\sum_{k=1}^{n} C_k = 0$. Bizonyítsuk be továbbá, hogy ez esetben érvényes a

$$\sum_{k=1}^{n} (\varrho_{1;k} + \varrho_{2:k}) + \varrho_{1,\infty} + \varrho_{2,\infty} = n - 1$$

egyenlet, ahol $\varrho_{1,k}$ és $\varrho_{2,k}$ az α_k szinguláris ponthoz, $\varrho_{1,\infty}$ és $\varrho_{2,\infty}$ pedig a végtelen távoli szinguláris ponthoz tartozó karakterisztikus exponensek.

2. Milyen feltételek mellett határozzák meg a másodrendű FUCHS-típusú differenciálegyenletet egyértelműen a szinguláris helyek és a hozzájuk tartozó karakterisztikus exponensek?

3. Bizonyítsuk be, hogy a

$$w'' = \left\{ \frac{f}{z-a} + \frac{g}{z-b} + \frac{h}{z-c} \right\} w' + \left\{ \frac{l}{z-a} + \frac{m}{z-b} + \frac{n}{z-c} \right\} \frac{w}{(z-a)\,(z-b)\,(z-c)}$$

differenciálegyenlet akkor és csakis akkor FUCHS-típusú, ha $f + g + h = -2$.

Igazoljuk továbbá, hogy a karakterisztikus exponensek és a differenciálegyenletben szereplő állandók között a következő kapcsolatok érvényesek:

$$f = \lambda + \lambda' - 1; \quad g = \mu + \mu' - 1; \quad h = \nu + \nu' - 1; \quad l = -\lambda \cdot \lambda'(a-b)\,(a-c);$$

$$m = -\mu \cdot \mu'(b-c)\,(b-a); \qquad n = -\nu \cdot \nu'(c-a)\,(c-b);$$

ahol is: $\varrho_{1,a} = \lambda$; $\varrho_{2,a} = \lambda'$; $\varrho_{1,b} = \mu$; $\varrho_{2,b} = \mu'$; $\varrho_{1,c} = \nu$; $\varrho_{2,c} = \nu'$.

4. Igazoljuk, hogy érvényesek az alábbi azonosságok:

$$a)\quad \frac{(z-a)^{\sigma}\,(z-c)^{\varrho}}{(z-b)^{\sigma+\varrho}} \cdot P \begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \lambda & \mu & \nu & z \\ \lambda' & \mu' & \nu' & \end{Bmatrix} \equiv P \begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \lambda + \sigma & \mu - \sigma - \varrho & \nu + \varrho & z \\ \lambda' + \sigma & \mu' - \sigma - \varrho & \nu' + \varrho & \end{Bmatrix};$$

$$b)\quad P \begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha & 0 & z \\ 1-\gamma & \beta & \gamma - \alpha - \beta & \end{Bmatrix} \equiv P \begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & 0 & \alpha & \dfrac{z}{z-1} \\ 1-\gamma & \gamma - \alpha - \beta & \beta & \end{Bmatrix};$$

c) ha $\mu+\mu'+\nu+\nu'=\frac{1}{2}$, akkor: $P\left\{\begin{matrix}0 & \infty & 1 & \\ 0 & \mu & \nu & z \\ \frac{1}{2} & \mu' & \nu' & \end{matrix}\right\} \equiv$

$$\equiv P\left\{\begin{matrix}-1 & \infty & 1 & \\ \nu & 2\mu & \nu & \sqrt{z} \\ \nu' & 2\mu' & \nu' & \end{matrix}\right\}.$$

5. Igazoljuk, hogy a $\lambda+\mu-\nu-\sigma-\tau=0$ feltétel mellett a

$$P\left\{\begin{matrix}0 & 1 & a & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & z \\ 1-\lambda & 1-\mu & \nu & \tau & \end{matrix}\right\}$$

függvényrendszer a

$$w''+\left(\frac{\lambda}{z}+\frac{\mu}{z-1}+\frac{1-\nu}{z-a}\right)w'+\frac{\sigma\tau(z-q)}{z(z-1)(z-a)}w=0$$

differenciálegyenlet megoldásrendszere, ahol is q tetszőleges paraméter.

ε) 1. A

$$\frac{d^n w}{dz^n}+p_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}(z)\frac{dw}{dz}+p_n(z)\,w=0$$

differenciálegyenletnek legyen a végtelenben lényegesen szinguláris pontja, de rendelkezzék itt

$$e^{Q(z)}\cdot z^{\varrho}\left\{c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots\right\}$$

alakú normális megoldással, vagy legalábbis a megoldás aszimptotikus kifejtése legyen ilyen alakú.

Adjuk meg a $Q(z)$ polinom maximális fokszámát!

Útbaigazítás: Ha az eredeti w függő változó helyett az új $v(z)=w(z)\cdot e^{-Q(z}$ függő változót vezetjük be, akkor a $v(z)$-re adódó lineáris differenciálegyenletnek olyannak kell lennie, hogy annak legalább egy

$$z^{\varrho}\left\{c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots\right\} \qquad (c_0\neq 0)$$

típusú — illetve ilyen típusú aszimptotikus kifejtéssel rendelkező — megoldása legyen; a v-re adódó differenciálegyenletnek tehát vagy nem-lényegesen szinguláris pontja a végtelen távoli pont (ez esetben a normális megoldások egy alaprendszere is megadható), vagy pedig lényegesen szinguláris ugyan e pont, de ott mégis legalább egy fenti típusú sorral (aszimptotikus sorral — formálisan) kielégíthető a differenciálegyenlet. Nyilván ez utóbbi az általánosabb eset, ezért elsősorban erre kell (szükséges) kritériumot keresnünk.

Erre a kritériumra két úton is eljuthatunk. Az egyik: Ha a feladat megszövegezésében szereplő differenciálegyenletnek a végesben (pl. az origóban) van egy lényegesen szinguláris pontja, és ott a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ együtthatóknak rendre $P_1; P_2; \ldots, P_n$-ed rendű a pólusuk, az egyenletnek azonban itt legalább egy

$$u = z^{\varrho}(d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \ldots) \qquad (d_0 \neq 0)$$

alakú megoldása van, akkor a

$$p_n(z) = -\frac{1}{u}\left\{\frac{d^n u}{dz^n} + p_1 \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}\frac{du}{dz}\right\}$$

előállításból következően P_n nem lehet nagyobb, mint a

$$\max\{(P_1 + n - 1); (P_2 + n - 2); \ldots; (P_{n-1} + 1)\}$$

mennyiség. A végtelen távoli pont esetére e kritérium a $\zeta = \frac{1}{z}$ transzformáció révén vihető át. Eszerint, ha a végtelen távoli pont környezetében a $p_r(z)$ függvény kifejtése

$$p_r(z) = z^{P_r^*}\left(\alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{z} + \alpha_2 \frac{1}{z^2} + \ldots\right) \qquad (\alpha_0 \neq 0)$$

alakú, akkor a megadott: $z^{\varrho}\left(c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots\right)$ típusú megoldás csak akkor elégítheti ki a differenciálegyenletet, ha

$$P_n^* \leqq \max\{(P_{n-1}^* - 1); (P_{n-2}^* - 2); \ldots; (P_1^* - n + 1); (-n)\}.$$

Ugyanerre az eredményre vezet az a másik meggondolás is, hogy a keresett alakú megoldás — formálisan — csak akkor elégítheti ki az egyenletet, ha a z legmagasabb — a p_n w sorfejtésben még előforduló — hatványa ($: z^{\varrho + P_n^*}$) előfordul a $p_{n-1}\frac{dw}{dz}$; $p_{n-2}\frac{d^2w}{dz^2}; \ldots; p_1\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}; \frac{d^n w}{dz^n}$ kifejtései közül legalább az egyikben; ezekben az előforduló legmagasabb kitevők pedig rendre: $\varrho + P_{n-1}^* - 1; \varrho + P_{n-2}^* - 2; \ldots; \varrho + P_1^* - n + 1; \varrho - n$. (Egyébként ti. nem lehet a legmagasabb fokú tag együtthatóját zérussá tenni.)

Ha mármost Q egy s-ed fokú polinom:

$$Q = \gamma_1 z^s + \gamma_2 z^{s-1} + \ldots,$$

akkor a

$$\frac{d^m e^Q}{dz^m} = t_m e^Q; \quad t_0 = 1; \quad t_1 = Q'; \ldots; \quad t_m = t'_{m-1} + t_{m-1} Q'; \ldots$$

jelölések bevezetésével egyrészt megállapíthatjuk, hogy az új v-változóra vonatkozó

$$\frac{d^n w}{dz^n} + q_1(z)\frac{d^{n-1} v}{dz^{n-1}} + \ldots + q_{n-1}(z)\frac{dv}{dz} + q_n(z)\, v = 0$$

differenciálegyenletben:

$$q_\nu(z) = p_\nu(z) + \binom{n-\nu+1}{1} t_1 p_{\nu-1} + \binom{n-\nu+2}{2} t_2 p_{\nu-2} + \ldots + \binom{n}{\nu} t_\nu$$

másrészt, hogy $t_m(z)$ pontosan $m(s-1)$-ed fokú polinom.

Felhasználva mármost az előzőekben kapott eredményt, amely szerint a ν-re vonatkozó differenciálegyenletnek csak akkor lehet $z^\varrho\left(c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots\right)$ alakú megoldása, ha $q_n(z)$ végtelenbeni pólusának rendje, azaz a $q_n(z) = p_n(z) + t_1 p_{n-1}(z) + \ldots + t_n(z)$ rendje, amely nyilván $\max\{P_n^*;\ (s-1) + P_{n-1}^*;\ 2(s-1) + P_{n-2}^*;\ \ldots;\ n(s-1)\}$-gyel egyenlő, nem nagyobb, mint a $\max\{P_{n-1}^* - 1;\ (s-1) + P_{n-2}^* - 1;\ \ldots;\ -n\}$ mennyiség. Ez pedig akkor és csakis akkor következik be, ha a

$$P_n^* - n(s-1);\ P_{n-1}^* - (n-1)(s-1);\ P_{n-2}^* - (n-2)(s-1);\ \ldots;\quad ;\ 0$$

mennyiségek közül a két legnagyobb egyenlő egymással, tehát ha a

$$P_\nu^* - \nu(s-1) \geqq 0, \quad \text{azaz} \quad \frac{P_\nu^*}{\nu} \geqq (s-1)$$

egyenlőtlenség ν legalább egy értékére fennáll, amiből

$$s \leqq 1 + \max\left\{\frac{P_n^*}{n};\ \frac{P_{n-1}^*}{n-1};\ \ldots;\ \frac{P_2^*}{2};\ P_1^*\right\}.$$

Megjegyezzük még, hogy a következő mellékeredményt is leolvashatjuk a fentiekből: minthogy s szükségképp nem kisebb 1-nél — ti. $s = 0$ esetén e^Q faktor egyáltalán nem szerepel — azért a $\max\left\{\frac{P_n^*}{n};\ \frac{P_{n-1}^*}{n-1};\ \ldots;\ \frac{P_2^*}{2};\ P_1^*\right\}$ mennyiség negatív volta kizárja a normális megoldás létezését!

2. Tekintsük a

$$w'' + p(z)\,w' + q(z)\,w = 0$$

differenciálegyenletet, ahol is p, illetve q kifejtése a végtelen távoli pont környezetében:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k};\quad q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^k};\quad a_0 \neq 0;\quad b_0 \neq 0.$$

Van-e a végtelen távoli pontban normális megoldás, s ha igen, adjuk meg a normális megoldást meghatározó Q determináló faktort és ϱ karakterisztikus exponenst!

Megoldás: Minthogy $P_1^* = 0$, és $P_2^* = 0$ (megtartottuk az előző feladat jelöléseit), azért a normális megoldás létezésével kapcsolatos az előző feladatban megadott szükséges feltétel — ti. hogy

$$\max\left\{\frac{P_2^*}{2};\ P_1^*\right\} \geqq 0$$

— nyilván teljesül. Emellett $s \leqq 1 + 0 = 1$, azaz a determináló faktor fokszáma legfeljebb (de legalább) 1:

$$Q = \alpha z.$$

Az előző feladat értelmében az αz exponenst úgy kell megválasztanunk, hogy az új — $v(z) = e^{-\alpha z} w(z)$ alakú — változóra vonatkozó differenciálegyenletnél teljesüljön az a feltétel, hogy v koefficiense legalább egy nagyságrenddel kisebb a végtelen távoli pont környezetében, mint v'-é.

Minthogy pedig az új differenciálegyenlet ilyen alakú:

$$v'' + \left|2\alpha + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots\right| v' + \left(\alpha_2 + \alpha a_0 + b_0 + \frac{\alpha a_1 + b_1}{z} + \ldots\right| v = 0,$$

azért α szükségképp az $\alpha^2 + \alpha a_0 + b_0 = 0$ egyenlet (egyik) gyöke. (A két gyöknek általában két lineárisan független normálmegoldás felel meg.)

A ϱ karakterisztikus exponens meghatározása a következő elv alapján történhet: ha a $z^{\varrho} v(z) = u(z)$ reláció révén az új u függő változót tekintjük, akkor az u-ra vonatkozó differenciálegyenletnek — normális megoldást keresünk! — a végtelen távoli pont környezetében reguláris, azaz $c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots$ alakú megoldásának kell lennie. Minthogy pedig ennek már az első deriváltja is *kettővel* kisebb nagyságrendű $z \to \infty$ esetén, mint az $u(z)$ függvény, azért az ilyen megoldás létezésének kritériuma (lásd az előző feladat jelöléseit és gondolatmenetét):

$$P_1^* \leqq \max\{(P_{n-1}^* - 2);\ (P_{n-2}^* - 3);\ \ldots;\ (P_1^* - n);\ -(n+1)\}.$$

Így tehát a mi esetünkben az új differenciálegyenletben u koefficiense két nagyságrenddel kisebb kell hogy legyen, mint u'-é. Az új differenciálegyenlet egyébként ($u = z^{-\varrho} v$):

$$u'' + \left(2\alpha + a_0 + \frac{2\varrho + a_1}{z} + \ldots\right) u' + \left[\frac{(2\alpha + a_0)\varrho + \alpha a_1 + b_1}{z} + \ldots\right] u = 0,$$

s így ϱ a $(2\alpha + a_0)\varrho + \alpha a_1 + b_1 = 0$ egyenlet gyöke:

$$\varrho = -\frac{\alpha a_1 + b_1}{2\alpha + a_0}.$$

3. Van-e a

$$z w'' + w' + w = 0$$

differenciálegyenletnek a lényegesen szinguláris végtelen távoli pont környezetében normális megoldása? Ha igen, adjuk meg a determináló faktort és a karakterisztikus exponenst.

4. Van-e a

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) w = 0$$

BESSEL-féle differenciálegyenletnek a lényegesen szinguláris végtelen távoli pont környezetében normális megoldása? Ha igen, adjuk meg a determináló faktort, a karakterisztikus exponenst és a megoldást!

5. Tekintsük a végtelen távoli pont környezetében a

$$z\,w'' + w' + \left(\lambda - \frac{z}{4} - \frac{s^2}{4z}\right) w = 0$$

ún. *általánosított* LAGUERRE-féle differenciálegyenletet, ahol $\lambda > 0$. Van-e ott normális megoldás? Ha igen, adjuk meg a determináló faktort és a karakterisztikus exponenst.

6. Van-e a

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2}\right) w = 0$$

WHITTAKER-féle differenciálegyenletnek a lényegesen szinguláris végtelen távoli pont környezetében normális megoldása? Ha igen, adjuk meg!

μ) 1. Tekintsük a

$$w'' + p_1(z)\,w' + p_2(z)\,w = 0$$

differenciálegyenletet, amelynek koefficiensei elliptikus függvények (2ω és $2\omega'$ primitív periódus-párral), és tegyük fel, hogy létezik egyértékű alapmegoldás-rendszer.

Bizonyítsuk be, hogy ez esetben a megoldások kvázi-kettősperiódusú függvények (2ω, illetve $2\omega'$ kváziperiódussal). Adjunk meg explicite egy alapmegoldás-rendszert.

Útbaigazítás: Ha a $w_1(z)$; $w_2(z)$ függvények alapmegoldás-rendszert adnak — és egyértékű függvények, ami nyilván akkor és csakis akkor következhetik be, ha az együtthatók pólushelyeihez tartozó karakterisztikus exponensek egész számok —, akkor triviális az az állítás, hogy a $w_1^*(z) = w_1(z + 2\omega)$; $w_2^* = w_2(z + 2\omega)$ függvények is alapmegoldás-rendszert szolgáltatnak, s így w_1^* és w_2^* kifejezhető a w_1 és w_2 lineárkombinációjával.

Található tehát olyan $u_1 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ lineárkombináció, amelyre

$$u_1(z + 2\omega) \equiv s \cdot u_1(z).$$

Mármost a $(w_1; w_2)$, ugyanígy a $(w_1^*; w_2^*)$, tehát az u_1 függvény is olyanok, hogy argumentumukat a másik periódussal, $2\omega'$-vel növelve is megoldást kapunk. Így az

$$u_1(z + 2\omega') \equiv u_2(z)$$

jelölést bevezetve, $u_2(z)$ is megoldás, és vagy fennáll egy

$$u_2(z) \equiv s'\,u_1(z)$$

típusú egyenlőség, vagy pedig u_1 és u_2 lineárisan függetlenek, s így megkereshető egy olyan lineárkombinációjuk, $v_1(z)$, hogy fennálljon a

$$v_1(z + 2\omega') \equiv s'\,v_1(z)$$

reláció. Egyszersmind érvényes a

$$v_1(z + 2\omega) \equiv s\,v_1(z)$$

reláció is, hiszen u_1-re érvényes volt, ebből következően u_2-re és így v_1-re is érvényes a fenti alakú reláció.

Tekintsük mármost a

$$\psi(z) \equiv e^{\lambda z}\frac{\sigma(z-a)}{\sigma(z)}$$

függvényt. Meg lehet itt választani a λ és a állandókat úgy, hogy érvényes legyen a

$$\psi(z+2\omega) \equiv s\,\psi(z); \qquad \psi(z+2\omega') \equiv s'\,\psi(z)$$

azonosságpár. Ugyanis:

$$\psi(z+2\omega) \equiv e^{2\lambda\omega-2\eta a}\cdot\psi(z); \quad \psi(z+2\omega') \equiv e^{2\lambda\omega'-2a\eta'}\cdot\psi(z),$$

és az ennek felhasználásával adódó

$$2\lambda\,\omega - 2\eta\,a = \ln s; \quad 2\lambda\,\omega' - 2\eta'\,a = \ln s'$$

egyenletrendszernek van megoldása, hiszen a LEGENDRE-összefüggés szerint

$$\eta\,\omega' - \eta'\,\omega = \frac{1}{2}\pi\,i \neq 0.$$

Ennek következtében a $\frac{v_1(z)}{\psi(z)}$ függvény, amelyet $E(z;\,2\omega;\,2\omega')$-vel jelölünk, elliptikus. A differenciálegyenlet egy megoldása tehát

$$v_1(z) \equiv e^{\lambda z}\frac{\sigma(z-a)}{\sigma(z)}\cdot E(z)$$

alakú.

Az általános esetben mindkét — az előzőekben fellépett — karakterisztikus egyenlet két különböző gyökkel rendelkezik, és így két lineárisan független megoldást kapunk az előbb vázolt módon.

Minthogy a speciális esetek közül nyilván az tárgyalható nehezebben, amikor mindkét karakterisztikus megoldás kettős gyökkel rendelkezik, röviden ismertetjük ezt az esetet is. Ekkor $v_2(z)$-ről, a másik megoldásról a következőket tudjuk:

$$v_2(z+2\omega) \equiv s\,v_2(z) + t\,v_1(z); \quad v_2(z+2\omega') \equiv s'\,v_2(z) + t'\,v_1(z).$$

A két függvény $X(z) = \frac{v_2(z)}{v_1(z)}$ viszonya tehát a következő függvényegyenleteket elégíti ki:

$$X(z) + \frac{t}{s} \equiv X(z+2\omega); \qquad X(z) + \frac{t'}{s'} \equiv X(z+2\omega').$$

Ez az egyenletpár nyilván a ζ függvény kváziperiodicitására jellemző függvényegyenlettípust mutatja, és így az

$$E^*(z) \equiv X(z) - A\,\zeta(z) - B\,z$$

függvény A és B állandóját meg lehet úgy választani, hogy E^* elliptikus függvény legyen. A és B ti. az

$$A\,\eta + B\,\omega = \frac{t}{2s}; \qquad A\,\eta' + B\,\omega' = \frac{t'}{2s'}$$

egyenletrendszert kell hogy kielégítse. $v_2(z)$ tehát ilyen alakú:

$$v_2(z) \equiv v_1(z)\,[E^*(z) + A\,\zeta(z) + B\,z\,].$$

2. Általánosítsuk az előző feladat tételét és eredményeit az m-ed rendű lineáris homogén differenciálegyenlet esetére!

3. Tekintsük a

$$w'' - [h + \nu(\nu + 1)\,\wp(z)]\,w = 0$$

ún. LAMÉ-féle differenciálegyenletet. Milyen követelményt kell kielégítenie ν-nek, hogy az előző feladatok eredményeit felhasználhassuk. Adjuk meg ν ilyen értékei mellett a megoldást.

Útbaigazítás: Az origo csúcspontú periódus-paralelogrammában csak az origóban van szinguláris pontja az egyenletnek, éspedig nyilván nem-lényeges szingularitással. A karakterisztikus egyenlet gyökei: $-\nu$ és $\nu + 1$. Ezeknek tehát egész számoknak kell lenniük; legyen pl. ν pozitív egész szám. Jelöljük továbbá a-val a

$$\wp(z) = h$$

egyenletnek a tekintett periódus-paralelogrammába eső gyökét. Mármost a $h \neq e_i$ $(i = 1, 2, 3)$ esetben egy alapmegoldás-rendszer:

$$w_1 = e^{-zh} \cdot \frac{\sigma(z + a)}{\sigma(z)}; \qquad w_2 = e^{zh} \frac{\sigma(z - a)}{\sigma(z)},$$

a $h = e_i$ esetben viszont:

$$w_1 = e^{-z\eta_i^*} \cdot \frac{\sigma(z + \omega_i^*)}{\sigma(z)}; \qquad w_2 = e^{-z\eta_i^*} \cdot \frac{\sigma(z + \omega_i^*)}{\sigma(z)} \cdot \{\zeta(z + \omega_i^*) + e_i\, z\}$$

alakú, ahol is $\eta_1^* = \eta$; $\eta_2^* = \eta + \eta'$; $\eta_3^* = \eta'$; $\omega_1^* = \omega$; $\omega_2^* = \omega + \omega'$; $\omega_3^* = \omega'$.

4. Tegyük fel, hogy a 6. § *b) μ)* 1., illetve 2. feladatában nem teljesül az a feltétel hogy létezik egyértékű alapmegoldás-rendszer, ezzel szemben az teljesül, hogy az alapmegoldás-rendszer bármely két megoldásának viszonya már egyértékű.

Igazoljuk, hogy ekkor található olyan m természetes szám és $E_m(z)$ elliptikus függvény ($2m\,\omega$ és $2m\,\omega'$ primitív periódusokkal), hogy a

$$w(z) = E_m(z) \cdot W(z)$$

reláció révén az új W függő változót bevezetve, az erre adódó differenciálegyenletnek (amelynek együtthatói most már $2m\,\omega$, illetve $2m\,\omega'$ primitív perióduspárral rendelkező elliptikus függvények) már van egyértékű alapmegoldás-rendszere.

5. Tekintsük a

$$w'' + q_1(z)\,w' + q_2(z)\,w = 0$$

differenciálegyenletet, amelyben az együtthatók meromorf, 2ω periódusú függvények.

Bizonyítsuk be, hogy ez esetben létezik vagy egy

$$w_1(z) = e^{\alpha_1 z} \cdot \Pi_1(z); \quad w_2(z) = e^{\alpha_2 z}\,\Pi_2(z)$$

típusú [Π_1; Π_2 (és Π_3) 2ω periódusú függvények; ez az eset lép fel, ha a megfelelő karakterisztikus egyenletnek különbözőek a gyökei], vagy pedig

$$w_1(z) = e^{\alpha_1 z}\,\Pi_1(z); \quad w_2(z) = e^{\alpha_1 z}\{P(z) \cdot \Pi_2(z) + \Pi_3(z)\}$$

típusú az alapmegoldás-rendszere ($P(z)$ elsőfokú polinom; a karakterisztikus egyenletnek kettős gyöke van).

6. Általánosítsuk az 5. feladat eredményeit az m-ed rendű lineáris differenciálegyenlet esetére.

7. Tekintsük a

$$w'' + (a + 16q \cos 2z)\, w = 0$$

ún. MATHIEU-féle differenciálegyenletet, ahol a és q állandók.

Meghatározható-e q bármely értékéhez az $a = a(q)$ paraméter úgy, hogy az egyenletnek legyen periodikus alapmegoldás-rendszere?

Adjuk meg azt a megoldást, amely $q \to 0$ esetben az azonosan 1 függvényhez konvergál. Hogy függ össze ez esetben a és q?

c)

α) 1. Oldjuk meg az általánosított LAPLACE-transzformáció segítségével a

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \lambda^2)\, w = 0$$

differenciálegyenletet, és adjuk meg a megoldások aszimptotikus kifejtését.

Útbaigazítás: A $w = z^{\lambda} u$ reláció révén bevezetve az új u függő változót, erre a

$$z u'' + (2\lambda + 1)\, u' + z u = 0$$

differenciálegyenlet adódik, ami a LAPLACE-transzformáció alkalmazását lényegesen megkönnyíti, lévén az együtthatók most már legfeljebb első fokú polinomok.

A megoldást tehát

$$u(z) = \int_{(C)} U(\zeta)\, e^{\zeta z}\, d\zeta$$

alakban keressük. A z szerinti formális differenciálás az

$$u'(z) = \int_{(C)} \zeta \cdot U(\zeta)\, e^{\zeta z}\, d\zeta; \qquad u''(z) = \int_{(C)} \zeta^2\, U(\zeta)\, e^{\zeta z}\, d\zeta$$

formulákat szolgáltatja, míg z-vel történő szorzás és parciális integrálás révén a

$$z\, u(z) = [U(\zeta)\, e^{z\zeta}]_{(C)} - \int_{(C)} \frac{dU}{d\zeta}\, e^{z\zeta}\, d\zeta;$$

$$z\, u'(z) = [\zeta\, U(\zeta)\, e^{z\zeta}]_{(C)} - \int_{(C)} \frac{d}{d\zeta}\, [\zeta\, U]\, e^{z\zeta}\, d\zeta;$$

$$z\, u''(z) = [\zeta^2\, U(\zeta)\, e^{z\zeta}]_{(C)} - \int_{(C)} \frac{d}{d\zeta}\, [\zeta^2\, U]\, e^{z\zeta}\, d\zeta$$

formulák adódnak, ahol a $[\varphi(\zeta; z)]_{(C)}$ szimbólum a φ függvény megváltozását jelöli, mialatt ζ végigfutja a C görbét.

Mindezt helyettesítve, U-t, illetve C-t úgy kell választanunk, hogy az

$$[(\zeta^2 + 1)\, U(\zeta)\, e^{z\zeta}]_{(C)} + \int_{(C)} \left[(2\lambda + 1)\, \zeta\, U(\zeta) - \frac{d}{d\zeta}\, (\zeta^2\, U) - \frac{d}{d\zeta}\, U(\zeta)\right] e^{\zeta z}\, d\zeta \equiv 0$$

(z-ben értett) azonosság teljesüljön. E célból először U-t választjuk meg úgy, hogy a

$$(2\lambda + 1)\,\zeta\,U(\zeta) - \frac{d}{d\zeta}(\zeta^2 U) - \frac{d}{d\zeta}U \equiv 0$$

azonosság teljesüljön; e lineáris differenciálegyenlet egyik megoldása:

$$U(\zeta) \equiv (\zeta^2 + 1)^{\lambda - \frac{1}{2}}.$$

U ilyen választása mellett a fent szereplő második tag a C görbe, és z választásától függetlenül azonosan 0, tehát a C görbe megfelelő választásával elérhetjük, hogy az első tag (z-ben azonosan) 0 legyen, ti. hogy mialatt ζ végigfut a C görbe mentén, a $[(\zeta^2 + 1)\,U(\zeta)\,e^{z\zeta}]$ teljes megváltozása 0 legyen. Mármost az

$$f(\zeta; z) = (\zeta^2 + 1)\,U(\zeta)\,e^{z\zeta} = (\zeta^2 + 1)^{\lambda + \frac{1}{2}} \cdot e^{z\zeta}$$

függvény a $\zeta = \pm i$ pontokban általában elágazással rendelkezik; ha azonban a $+i$ és $-i$ pontokból egy-egy bemetszést készítünk a negatív valós tengely irányában a „$-\infty$" pontig, az így felhasított ζ síkon $f(\zeta, z)$ biztosan egyértékű. A $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg z < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ feltétel mellett tehát a C_1, illetve C_2 görbét úgy választva, hogy az az első, illetve második bemetszést a $-\infty$-ből kiindulva, és oda a bemetszés másik partján visszatérve megkerüli, akkor követelményeink teljesülnek. Utólagosan most már ellenőrizhetjük, hogy számításaink formálisak voltak-e, avagy a ζ szerinti integrálás és z szerinti differenciálás sorrendje valóban felcserélhető. Könnyen belátható, hogy az utóbbi esettel állunk szemben, és így

$$w_1(z) = A(\lambda)\,z^{\lambda} \int_{(C_1)} (\zeta^2 + 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} e^{z\zeta}\,d\zeta; \qquad w_2(z) = B(\lambda)\,z^{\lambda} \int_{(C_2)} (\zeta^2 + 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} e^{z\zeta}\,d\zeta$$

— könnyen beláthatóan — egy alapmegoldás-rendszert szolgáltatnak.

Ezek aszimptotikus kifejtését megkönnyítendő, bevezetjük a $\zeta = i\tau$ reláció révén a τ integrációs változót, miáltal a ζ sík két bemetszése a τ sík -1, illetve $+1$-ből kiinduló, a pozitív imaginárius tengely irányában haladó bemetszésébe megy át, majd az l_1 és l_2 új integrációs utat ezekre teljesen rásimítjuk. A

$$w_1(z) = i\,e^{\pi\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)i} \cdot z^{\lambda} \int_{i}^{\infty} (\tau^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} e^{iz\tau}\,d\tau; \quad w_2 = i\,e^{\pi\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)i} \cdot z^{\lambda} \int_{i}^{\infty} (\tau^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} e^{iz\tau}\,d\tau$$

paraméteres integrálok aszimptotikus kifejtése ekkor a nyeregpontmódszer segítségével — vagy az integrandus megfelelő sorfejtésével — megtörténhet

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg z < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right):$$

$$w_1(z) \sim e^{-\frac{\pi}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2} - \frac{2z}{\pi}\right)i} \frac{1}{\sqrt{z}} (1 + e^{2\pi\lambda i})\,2^{\lambda - \frac{1}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{k} \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2} + k\right) \left(\frac{i}{2z}\right)^k$$

illetve

$$w_2(z) \sim e^{-\frac{3\pi}{2}\lambda i + \frac{3\pi}{4} i + zi} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} (1 + e^{2\pi\lambda i})\, 2^{\lambda - \frac{1}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{k} \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2} + k\right)\left(-\frac{i}{2z}\right).$$

2. Igazoljuk, hogy $\operatorname{Re}\lambda > -\frac{1}{2}$ esetben a $J_\lambda(z)$ BESSEL-függvény előállítható az alábbi integrállal:

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\lambda}\varphi \cdot \cos(z \sin\varphi)\, d\varphi.$$

Útbaigazítás: Az előző (1.) feladatban a $\operatorname{Re}\lambda > -\frac{1}{2}$ feltétel mellett a bemetszés a τ síkon a -1 és 1 pontot is összekötheti, és az l görbe rádeformálható ezen bemetszés alsó, illetve felső partjára. A konstans szorzófaktor megfelelő megválasztásával így a $J_\lambda(z)$-t kell megkapnunk, hiszen elesett a görbedeformáció miatt az arc z-re vonatkozó megkötés. Végül új $\sin\varphi = \tau$ integrációs változót vezetve be, kapjuk a fenti előállítást.

3. Integráljuk LAPLACE-transzformáció segítségével a következő egyenleteket:

a) $z\,w'' - (\alpha + \beta)(1 + z)\,w' + \alpha\beta\, z\, w = 0; \qquad 0 < \beta < -\alpha.$

b) $z\,w'' + 2a\,w' - q^2 z\, w = 0; \qquad a > 0; \qquad \operatorname{Re} z > 0.$

4. Tekintsük a

$$z\,w'' + a\,w' - q^2 z\, w = 0$$

egyenletet, és igazoljuk, hogy a $0 < a < 2$ esetben az általános integrál a következő formulával adható meg:

$$w = \int_0^{\pi} e^{zq\cos\varphi} (A \sin^{a-1}\varphi + B\, z^{1-a} \sin^{1-a}\varphi)\, d\varphi.$$

5. Határozzuk meg a

$$2x\,y' + 2z' + y = 0$$
$$2y' = 2\,x\,z' + z$$

rendszer megoldásrendszerét az $\operatorname{Im} x < 1$ feltétel mellett az általánosított LAPLACE-transzformáció segítségével.

β) 1. Tekintsük a

$$Q(z)\,w'' + L(z)\,w' + K\,w = 0$$

differenciálegyenletet, ahol Q legfeljebb másod-, L legfeljebb első-, K pedig nulladfokú polinomja z-nek, és igazoljuk, hogy ez esetben található

$$w_1 = \int_{(C_1)} \omega(\zeta) \cdot (\zeta - z)^{\lambda+1}\, d\zeta; \qquad w_2 = \int_{C_2} \omega(\zeta) \cdot (\zeta - z)^{\lambda+1}\, d\zeta$$

alakú alapmegoldás-rendszer.

Útbaigazítás: A tett feltevések mellett található olyan μ szám és $L^*(z)$ legfeljebb első fokú polinom, hogy fennálljon a

$$Q \cdot w'' + L\,w' + K\,w \equiv$$

$$\equiv \left[Q\,w'' - \mu\,Q'\,w' + \frac{\mu(\mu+1)}{2}\,Q''\,w\right] + [-L^*\,w' + (\mu+1)\,L^{*\prime}\,w]$$

azonosság. Mármost a $\lambda = \mu$ választással helyettesítsük w-t $\int_{(C)} \omega(\zeta)\cdot(\zeta - z)^{\lambda+1}\,d\zeta$-val, és a z szerinti deriválást — egyelőre formálisan — cseréljük fel a ζ szerinti integrálással. Így adódik a

$$\int_{(C)} \omega(\zeta)\,\{\lambda(\zeta - z)^{\lambda-1}\,Q(\zeta) + (\zeta - z)^{\lambda}\,L^*(\zeta)\}\,d\zeta \equiv 0$$

követelmény. Ha tehát $\omega(\zeta)$ kielégíti az

$$\omega\,L^* \equiv \frac{d}{d\zeta}\,[\omega\,Q]$$

differenciálegyenletet, akkor érvényes a

$$\frac{d}{d\zeta}\,\{\omega(\zeta)\,Q(\zeta)\,(\zeta - z)^{\lambda}\} \equiv \omega(\zeta)\,\{\lambda(\zeta - z)^{\lambda-1}\,Q(\zeta) + (\zeta - z)^{\lambda}\,L^*(\zeta)\}$$

azonosság, és így

$$\int_{(C)} \omega(\zeta)\,\{\lambda(\zeta - z)^{\lambda-1}\,Q + (\zeta - z)^{\lambda}\,L^*\}\,d\zeta = [\omega(\zeta)\,Q(\zeta)\,(\zeta - z)^{\lambda}]_{(C)}.$$

Az eredeti egyenlet megoldása tehát az $\omega\,L^* = \frac{d}{d\zeta}\,[\omega\,Q]$ egyenletet kielégítő bármely $\omega(\zeta)$ függvény segítségével képezhető a megadott alakban, ha a z-től függetlenül C-t úgy választjuk, hogy teljesüljön az

$$[\omega(\zeta)\,Q(\zeta)\,(\zeta - z)^{\lambda}]_{(C)} \equiv 0$$

(z-ben értett) azonosság.

2. Oldjuk meg a JORDAN-módszerrel a GAUSS-féle (hipergeometrikus) differenciálegyenletet:

$$z(1 - z)\,w'' + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)\,z\}\,w' - \alpha\,\beta\,w = 0,$$

és igazoljuk, hogy a megoldásrendszer pl. az

$$w_1 = \int_{(C)}^{(1+;\,0+;\,1-;\,0-)} \zeta^{\beta-1}\,(1 - \zeta)^{\gamma-\beta-1}\,(1 - z\zeta)^{-\alpha}\,d\zeta\,;$$

$$w_2 = \int_{(C)}^{(0+;\,z+;\,0-;\,z-)} \zeta^{\alpha-\gamma}\,(1 - \zeta)^{\gamma-\beta-1}\,(z - \zeta)^{-\alpha}\,d\zeta$$

alakban írható fel, ahol az $\int_{(C)}^{(\alpha+;\,\beta+;\,\alpha-;\,\beta-)}$ jelölés jelentése: A C zárt görbe megkerüli az α pontot, majd a β-t pozitív, ezután az α-t negatív, végül β-t negatív értelemben, ezután záródik.

3. Igazoljuk, hogy a LEGENDRE-féle *asszociált* egyenlet:

$$(1 - z^2)\, w'' - 2z\, w' + \left\{(n+1)\, n - \frac{m^2}{1 - z^2}\right\} w = 0$$

egy alapmegoldás-rendszere előállítható a

$$P_n^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \int_{(C)}^{(z+;\,1+;\,z-;\,1-)} (\zeta^2 - 1)^n\, (\zeta - z)^{-n-m-1}\, d\zeta;$$

$$Q_n^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \int_{(C)}^{(z+;\,-1+;\,z-;\,-1-)} (\zeta^2 - 1)^n\, (\zeta - z)^{-n-m-1}\, d\zeta$$

integrálokkal.

d)

α) 1. Bizonyítsuk be, hogy a BESSEL-féle differenciálegyenlet:

$$w'' + \frac{1}{z}\, w' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) w = 0$$

bármely — a $w_\lambda(z_0) = \alpha$; $w_\lambda'(z_0) = \beta$ feltételekkel egyértelműen meghatározott — $w_\lambda(z)$ megoldása kielégíti a

$$\frac{d}{dz}\{z^\lambda\, w_\lambda(z)\} \equiv z^\lambda\, w_{\lambda-1}(z); \qquad \frac{d}{dz}\{z^{1-\lambda}\, w_{\lambda-1}(z)\} \equiv -z^{1-\lambda}\, w_\lambda(z)$$

ún. rekurziós formulákat.

Útbaigazítás: Az állítást az explicit — sor alakban vagy kontúrintegrállal — előállított alaprendszer mindkét függvényére a differenciálások elvégzése útján könnyen igazolhatjuk; ebből pedig bármely más megoldás esetére is következtetni tudunk, lévén az meghatározott lineárkombinációja az alaprendszernek.

Elegánsabb azonban a következő módszer: először igazoljuk, hogy bármely függvény, amely kielégíti a két rekurziós formulát, kielégíti a differenciálegyenletet is, majd azt, hogy bármely két függvénnyel együtt azok lineárkombinációi is kielégítik a rekurziós formulapárt. Ebből pedig — felhasználva a differenciálegyenlet lineáris voltát — következik az is, hogy az állítás megfordítható, tehát a differenciálegyenlet megoldásai is kielégítik a rekurziós formulapárt.

Mármost a bizonyítás első része a következőképp haladhat: a második formulában szereplő $w_{\lambda-1}(z)$-t az első formula felhasználásával helyettesítjük; így adódik a

$$\frac{d}{dz}\left\{z^{1-2\lambda}\, \frac{d}{dz}\,[z^\lambda\, w_\lambda(z)]\right\} \equiv -z^{1-\lambda}\, w_\lambda(z)$$

reláció, amelyben a műveleteket elvégezve, épp a BESSEL-féle differenciálegyenlet adódik.

A bizonyítás második része triviális, hiszen mindkét tekintett rekurziós formula homogén lineáris alak.

2. Igazoljuk az alábbi függvényegyenlet érvényességét:

$$\frac{d}{dz} F(a, b, c; z) \equiv \frac{ab}{c} F(a + 1; b + 1, c + 1; z).$$

3. Határozzuk meg az alábbi határértéket:

$$\lim_{\beta \to \infty} F\left(1, \beta, 1; \frac{z}{\beta}\right).$$

4. Igazoljuk, hogy ha n természetes szám, akkor a LEGENDRE-féle

$$(1 - z^2) w'' - 2z w' + n(n + 1) w = 0$$

differenciálegyenletet a

$$w = \frac{d^n}{dz^n}[(z^2 - 1)^n]$$

függvény kielégíti.

5. Bizonyítsuk be, hogy egy az

$$(1 - z^2) w'' - 2z w' + \lambda(\lambda + 1) w = 0$$

differenciálegyenletet kielégítő $w_\lambda(z)$ függvényrendszer a következő rekurziós formula révén is származtatható:

$$w'_{\lambda-1}(z) - z w_\lambda(z) \equiv (\lambda + 1) w_\lambda(z).$$

6. Tekintsük n valamely természetes értéke mellett a

$$z w'' + (1 - z) w' + n w = 0$$

LAGUERRE-féle differenciálegyenletet, és igazoljuk, hogy azt a

$$w_n(z) = e^z \frac{d^n}{dz^n}[z^n \cdot e^{-z}]$$

polinom kielégíti.

7. Bizonyítsuk be, hogy az HERMITE-féle

$$w'' - 2z w' + 2n w = 0$$

differenciálegyenletet n bármely természetes értéke mellett kielégíti a

$$w_n(z) = e^{z^2} \cdot \frac{d^n}{dz^n}[e^{-z^2}]$$

polinom.

8. Határozzuk meg a

$$z J_p(\alpha z) \cdot J_p(\beta z)$$

függvény primitív függvényeit, ahol $J_p(z)$ a p-ed rendű BESSEL-függvény, $J_p(\alpha z)$ pedig a *módosított* BESSEL-féle

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 \alpha^2 - p^2) w = 0$$

egyenlet megfelelő megoldása.

Útbaigazítás: A két definiáló differenciálegyenletből p^2-ot kiküszöbölve, a

$$\frac{d}{dz}[z\{J_p(\alpha z) \cdot J_p(\beta z) - J_p(\alpha z) J_p'(\beta z)\}] + (\alpha^2 - \beta^2) z J_p(\alpha z) \cdot J_p(\beta z) = 0$$

formulát kapjuk, amiből a megoldás könnyen leolvasható.

$\beta)$ 1. Bizonyítsuk be, hogy az

$$e^{\frac{1}{2} z \left(t - \frac{1}{t}\right)}$$

függvény az (egészindexű, első fajú) BESSEL-függvények generátorfüggvénye, azaz

$$e^{\frac{1}{2} z \left(t - \frac{1}{t}\right)} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \cdot t^n.$$

Útbaigazítás: Az $e^{\frac{1}{2} zt}$ és $e^{-\frac{1}{2} z \frac{1}{t}}$ függvény MACLAURIN-sorfejtése, a két sor összeszorzása, a részletszorzatok MACLAURIN-sorba történő rendezése és az együtthatósornak BESSEL-függvények ismert sorával történő összehasonlítása — tehát rengeteg számolás — útján igazolhatjuk az állítást. Lényegesen egyszerűbb azonban az az eljárás, amikor közvetlenül a $J_n(z)$ függvényekre jellemző differenciálegyenletet keressük meg, majd néhány egyszerű megfontolás alapján vizsgáljuk meg, hogy annak melyik partikuláris megoldásáról van szó.

A differenciálegyenlet megkeresése így történhet: A definíciós egyenlet mindkét oldalának t szerinti deriválása a

$$\frac{z}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} n t^{n-1} J_n(z)$$

azonosságot szolgáltatja, amiből együttható-összehasonlítással a

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) \equiv \frac{2n}{z} J_n(z)$$

azonosság olvasható le. Hasonlóképp a z szerinti deriválás a

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) \equiv 2 \cdot J_n'(z)$$

azonosságot szolgáltatja. E két azonosság összeadása, illetve kivonása a

$$z J_n'(z) + n J_n(z) \equiv z J_{n-1}(z), \quad \text{azaz} \quad \frac{d}{dz}[z^n J_n(z)] \equiv z^n J_{n-1}(z),$$

illetve a

$$z J_n'(z) - n J_n(z) \equiv - z J_{n+1}(z), \quad \text{azaz} \quad \frac{d}{dz}[z^{-n} J_n(z)] \equiv - z^{-n} J_{n+1}(z)$$

azonosságokat szolgáltatja. Azt viszont már láttuk a 6. § d) α) 1. feladatban, hogy e két utóbbi azonosságból (pontosabban, a másodikban elĕször elvégezve az $n \to n - 1$ indexcserét) hogyan juthatunk el a jellemző differenciálegyenletig.

Könnyen belátható, hogy az $J_n(z)$ együttható egyértékű az origo környezetében. Minthogy pedig a BESSEL-féle differenciálegyenlet másodfajú megoldása logaritmikus elágazással rendelkezik, azért minden olyan lineárkombináció, amelyben az egyértékű első fajú megoldás mellett a másodfajú is szerepel, szintén elágazással rendelkezik. Következésképp: A sorfejtés együtthatói, amelyek kielégítik a BESSEL-differenciálegyenletet, és az origo környezetében egyértékűek, az első fajú BESSEL-függvények állandószorosai. Hogy ez a szorzófaktor épp egységnyi, az a sorfejtés első tagjainak összehasonlításából leolvasható.

2. Határozzuk meg az ún. fázismodulált

$$y_k = \sin\left|\omega_0 t + \alpha \sin \frac{\omega_0}{k} t\right|; \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

hullámok FOURIER-sorfejtését.

Útbaigazítás: A BESSEL-függvények generátorfüggvényében végezzük el a

$$t = e^{i\varphi}$$

helyettesítést.

3. A generátorfüggvényre támaszkodva igazoljuk az (egészindexű) BESSEL-függvények alábbi addíciós formuláját:

$$J_n(z_1 + z_2) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z_1) J_{n-m}(z_2).$$

4. Az HERMITE-féle differenciálegyenlet:

$$w'' - 2z w' + 2\lambda w = 0$$

egyik partikuláris megoldássorozatának generátorfüggvénye a

$$\varphi(z, t) \equiv e^{-tz - \frac{t^2}{2}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) \cdot t^n$$

függvény. Igazoljuk ezt, továbbá, hogy a λ természetes értékeihez tartozó megoldások kielégítik az alábbi függvényegyenleteket:

$$w_\lambda'(z) \equiv - \lambda w_{\lambda-1}(z);$$

$$\lambda w_\lambda(z) + z w_{\lambda-1}(z) + w_{\lambda-2}(z) = 0.$$

5. A

$$\varphi(z; t) = (1 - t)^{-(a+1)} \cdot e^{-\frac{zt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(a)}(z) \cdot t^n$$

függvény az ún. *általánosított* LAGUERRE-féle differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldássorozatának generátorfüggvénye. Adjuk meg a másodrendű lineáris LAGUERRE-féle differenciálegyenletet.

6. A LEGENDRE-féle differenciálegyenlet polinommegoldás-sorozatának generátor függvénye a

$$\varphi(z;\ t) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - 2z\,t + t^2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z) \cdot t^{-\nu-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z)\, t^\nu$$

függvény. Igazoljuk ezt; mutassuk meg a generátorfüggvény ismeretében, hogy a LEGENDRE-polinomok előállíthatóak a LAPLACE-tól származó

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[z + x\sqrt{z^2 - 1}\right]^n \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

alakban.

6. §. FÜGGELÉK: A ZÉRUSHELYEK ELOSZLÁSA; A SAJÁTFÜGGVÉNYEK ORTOGONALITÁSA

Az alább felvetett problémákkal csak a másodrendű lineáris differenciálegyenletek körében — mint gyakorlatilag legfontosabb esetben — foglalkozunk; meg kell azonban jegyeznünk, hogy az alkalmazott tételek és módszerek könnyen átvihetőek a magasabbrendű differenciálegyenletek, illetve rendszerek esetére is.

a) A lineáris differenciálegyenletek megoldásának zérushelyeiről

α) **Zérushelyek a valós tengelyen**

Az alábbiakban az

$$L(y) \equiv \frac{d}{dx}\left\{M(x)\,\frac{dy}{dx}\right\} - N(x)\cdot y = 0$$

ún. önadjungált másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásainak zérushelyeit vizsgáljuk, éspedig néhány olyan tételre támaszkodva, amelyek ugyanezen differenciálegyenlet egy másik megoldásának, illetve egy hasonló típusú (de más együtthatókkal rendelkező) egyenlet valamely megoldásának zérushelyeivel hasonlítják össze a tekintett megoldás gyökhelyeinek elhelyezkedését.

A LAGRANGE-féle középértéktétel közvetlen következménye az alábbi alapvető állítás: Az $L(y) = 0$ differenciálegyenlet egyetlen, az (a, b) intervallumon folytonos megoldása sem rendelkezhet itt (ti. az $a < x < b$ intervallumon) végtelen sok zérushellyel, az azonosan 0 megoldást kivéve; M-ről és N-ről feltesszük, hogy előbbi folytonosan differenciálható, utóbbi folytonos (a, b)-ben.

Legyen mármost y_1 és y_2 az $L(y) = 0$ egyenlet két valós és lineárisan független megoldása, amelyek (a, b)-ben folytonosak és pl. $y_1 \neq 0$. Jelöljük x_1 és x_2-vel az $y_1(x) = 0$ egyenlet két — az (a, b)-be eső — szomszédos gyökét.

Fenti feltételek mellett y_2 az (x_1, x_2) intervallum belsejében legalább egy zérushellyel rendelkezik. (STURM oszcillációs tétele.)

A tétel igen egyszerűen — indirekt módon — igazolható; arra kell támaszkodnunk, hogy a $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2}$ kifejezés számlálója épp y_1 és y_2 WRONSKY-determinánsa.

STURM ún. összehasonlító tétele szerint a

$$\frac{d}{dx}\left(M\,\frac{dy}{dx}\right) - N_1 y = 0 \quad \text{és a} \quad \frac{d}{dx}\left(M\,\frac{du}{dx}\right) - N_2 u = 0$$

differenciálegyenlet y, illetve u — az (a, b)-ben folytonos — megoldásának zérushelyei között a következő egyszerű kapcsolat áll fenn, ha $a \leqq x \leqq b$-ben teljesül az $N_1 \geqq N_2$, de $N_1 \not\equiv N_2$ feltétel: y bármely két (a, b)-be eső szomszédos x_1, x_2 gyökhelye közé esik u-nak legalább egy gyökhelye: ξ

$$[x_1 < \xi < x_2; \qquad y(x_1) = y(x_2) = u(\xi) = 0].$$

A tétel bizonyítása egyszerű: indirekt és a GREEN-formulára támaszkodik, amely szerint

$$\left[M(y' u - y u')\right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (N_1 - N_2)\, y\, u\, dx,$$

ahol is a jobb oldal szükségképp ellenkező előjelű számot adna, mint a bal oldal, ha u-nak nem lenne 0 helye (x_1, x_2)-ben.

β) Zérushelyek a komplex síkon

Tekintsük ismét az önadjungált

$$\frac{d}{dz}\left[\bar{M}(z)\,\frac{dw}{dz}\right] + N(z)\, w = 0$$

differenciálegyenletet, és tegyük fel, hogy a T tartományban M és N analitikusak, továbbá, hogy M sehol sem tűnik el T-ben. Hogy a GREEN-formulához hasonló alakú képletet adhassunk meg a komplex számsíkon elvégzendő zérushely-eloszlás vizsgálata céljából, a $w_1 = w$; $w_2 = \bar{M}\frac{dw}{dz}$ helyettesítéssel az eredeti egyenlet helyett a vele ekvivalens egyenletrendszert tekintjük:

$$\frac{dw_1}{dz} = \frac{w_2}{\bar{M}}; \qquad \text{azaz} \qquad dw_1 = \frac{1}{\bar{M}}\, w_2\, dz$$

$$\frac{dw_2}{dz} = -N w_1, \qquad \text{azaz} \qquad dw_2 = -N w_1\, dz.$$

Az első egyenlet mindkét oldalának konjugáltját véve, majd azt w_2-vel, a második egyenletet pedig w_1-gyel szorozva és összeadva:

$$w_2\, d\bar{w}_1 + \bar{w}_1\, dw_2 = w_2 \cdot \bar{w}_2\, d\bar{z}\, \frac{1}{\bar{M}} - w_1 \cdot \bar{w}_1\, N\, dz,$$

azaz integrálva a T-beli z_1-től z_2-ig, egy teljesen T-be eső görbe mentén, megkapjuk a GREEN-formula analogonját:

$$\left[\bar{w}_1\, w_2\right]_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{|w_2|^2}{\bar{M}}\, d\bar{z} + \int_{z_1}^{z_2} |w_1|^2\, N\, dz = 0.$$

Bevezetve még a $\frac{dz}{M(z)} = d\varkappa = d\varkappa_1 + i\,d\varkappa_2$ és $N(z)\,dz = d\gamma = d\gamma_1 + i\,d\gamma_2$ jelöléseket és az előző formula valós és képzetes részét különválasztva, a

$$\operatorname{Re}[\overline{w}_1 w_2] - \int_{z_1}^{z_2} |w_2|^2\,d\varkappa_1 + \int_{z_1}^{z_2} |w_1|^2\,d\gamma_1 = 0$$

$$\operatorname{Im}[\overline{w}_1, w_2] + \int_{z_1}^{z_2} |w_2|^2\,d\varkappa_2 + \int_{z_1}^{z_2} |w_1|^2\,d\gamma_2 = 0$$

formulapárt kapjuk.

Megjegyezzük még, hogy az alapul vett differenciálegyenlet a $Z = M(z)$ új független változó bevezetésével a

$$\frac{d^2w}{dZ^2} + J(Z)\,w = 0; \qquad J(Z) = N[z(Z)] \cdot Z,$$

a $Z = N(z)$ új változó bevezetésével a

$$\frac{d}{dZ}\left[H(Z)\,\frac{dw}{dZ}\right] + w = 0; \qquad H(Z) = Z \cdot M[z(Z)],$$

végül a

$$dZ = \sqrt{\frac{N(z)}{M(z)}}\,dz; \qquad S(Z) = \sqrt{N[z(Z)]\,M[z(Z)]}$$

változók bevezetésével a szimmetrikus

$$\frac{d}{dZ}\left\{S(Z)\,\frac{dw}{dZ}\right\} + S(Z)\,w = 0$$

alakba megy át. A zérushelyek vizsgálatát illetően a legkedvezőbb az első alak. Tegyük fel a következőkben, hogy z_1 és z_2 a

$$z = z_1 + r\,e^{i\Theta}; \qquad \Theta = \text{const}$$

egyenletű egyenes pontjai, integrációs útnak a GREEN-formulában ezt az egyenest választjuk, és bevezetjük a

$$J(z) = j_1(z) + i\,j_2(z); \qquad \overline{w}\,\frac{dw}{dr} = f_1(r) + i\,f_2(r)$$

$$j_1(z)\cos 2\Theta - j_2(z)\sin 2\Theta = P(z;\Theta); \qquad j_2(z)\cos 2\Theta + j_1(z)\sin 2\Theta = Q(z;\Theta)$$

jelöléseket. Ez esetben a GREEN-formula analogonjának részletes vizsgálata a $\Theta = \text{const}$ egyenes mentén a következő tételeket szolgáltatja:

A) A kérdéses egyenes z_1 és z_2 közötti szakaszán legfeljebb egy 0 helye van a $w\,\frac{dw}{dz}$ szorzatnak (w kielégíti a $w'' + J(z)\,w = 0$ egyenletet), ha e szakasz T-be esik, és itt vagy (I) $P(z;\Theta) \leqq 0$, vagy (II) $Q(z;\Theta)$ nem vált előjelet. Egy sincs azonban, ha (I) mellett $f_1(0) \geqq 0$, vagy ha (II) mellett $f_2(0) \cdot Q(z;\Theta) < 0$ is érvényes a $0 \leqq r \leqq |z_2 - z_1|$ intervallumon.

B) Legyen $w(z)$ valós, ha z a valós (a, b) szakaszra esik, T pedig egy a valós tengelyre szimmetrikus olyan tartomány, amelynek peremét bármely, az imaginárius tengellyel párhuzamos egyenes legfeljebb két pontban metszi; legyen végül T-ben mindenütt $\mathrm{Re}\{J(z)\} \geqq 0$. Ez esetben $w(z)$-nek, illetve $\frac{dw}{dz}$-nek legfeljebb a valós tengelyen lehetnek 0 helyei.

C) A *B)* tételben a valós és a képzetes szavakat egymással, a $\mathrm{Re}\{J(z)\} \geqq 0$ feltételt pedig a $\mathrm{Re}\{J(z)\} \leqq 0$ feltétellel felcserélve, a tétel igaz marad.

b) A sajátfüggvények ortogonalitása és a Fourier-sorfejtés

A sajátérték-problémák egy speciális, de a gyakorlatban talán legfontosabb esetével, a STURM—LIOUVILLE-féle

$$\frac{d}{dx}\left\{m(x)\frac{dy}{dx}\right\} + \{\lambda\, g(x) - l(x)\}\, y = 0$$

homogén lineáris másodrendű differenciálegyenlettel és a hozzá csatlakozó (ún. harmadfajú)

$$\alpha\, y(a) + \beta\, y'(a) + \gamma\, y'(b) = 0$$

$$\delta\, y(b) + \varepsilon\, y'(a) + \mu\, y'(b) = 0$$

homogén határfeltétel-rendszerrel foglalkozunk, ahol feltesszük, hogy $m(x)$, $g(x)$ és $l(x)$ folytonosak (a, b)-ben, továbbá $m(x) > 0$ és $g(x) > 0$, ha $a \leqq x \leqq b$.

A fenti STURM—LIOUVILLE-féle rendszert λ bármely értékénél kielégíti a triviális $y \equiv 0$ függvény. A tett feltevések alapján azonban — a STURM-féle oszcillációs tétel alapján — λ növekvő értékeinél bármely $y(x)$ megoldásnak egyre több és több gyökhelye esik az (a, b) intervallumba, amelynek egyik következménye, hogy bizonyos λ értékekhez (ún. sajátértékekhez) tartozik a rendszer egy-egy nem-triviális megoldása is (az ún. sajátfüggvények, amelyeket a rendszer nyilván csak konstans faktortól eltekintve határoz meg), pontosabban: Létezik a $\{\lambda_i\}$ sajátértékek olyan monoton növekedő (és határozottan divergens) sorozata, amelyekhez tartozik a rendszer egy nem-triviális $\{y_i(x)\}$ sajátfüggvény-rendszere is, és $y_k(x)$-nek — az $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ számoktól függően — pontosan k vagy pontosan $k+1$ zérushelye van (a, b)-ben.

A GREEN-formula felhasználásával közvetlenül adódik az a tétel, hogy az $\{y_i(x)\}$ függvények a $g(x)$ súllyal ortogonális függvényrendszert alkotnak (a, b)-n, azaz

$$\int_a^b g(x) \cdot y_i(x)\, y_j(x)\, dx = 0, \quad \text{ha} \quad i \neq j.$$

Minthogy a sajátfüggvények csak konstans faktortól eltekintve vannak meghatározva, azért e faktort úgy szoktuk választani, hogy a sajátfüggvények „normáltak" is legyenek, azaz

$$\int_a^b y_i^2(x)\, g(x)\, dx = 1.$$

Így bármely négyzetesen integrálható $f(x)$ függvény FOURIER-sorba fejthető a sajátfüggvények rendszerében (amely teljes rendszer), azaz

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu y_\nu(x); \qquad f_\nu = \left[\int_a^b y_\nu^2 \cdot g(x)\, dx\right]^{-1} \cdot \int_a^b f(x)\, y_\nu(x)\, g(x)\, dx.$$

E sor nem szükségképp konvergál $f(x)$-hez! Aránylag könnyen igazolható azonban a következő elégséges kritérium: a $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu y_\nu(x)$ sor (a, b)-ben egyenletesen $f(x)$-hez konvergál, ha

1° $m(x) > 0$; $g(x) > 0$, ha $a \leqq x \leqq b$.

2° $l(x)$ folytonos függvény, $m(x)$ folytonosan, a $m(x) \cdot g(x)$ szorzat pedig kétszer folytonosan differenciálható (a, b)-ben.

3° $f(x)$ kétszer folytonosan differenciálható (a, b)-ben.

Példák és feladatok

a)

α) 1. Határozzuk meg a BESSEL-féle

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \lambda^2) y = 0$$

egyenlet megoldásainak gyökhelyeloszlását.

Útbaigazítás: Az egyenletet x-szel végigosztva, önadjungált alakot kapunk:

$$x y'' + y' + \left(x - \frac{\lambda^2}{x}\right) y = \frac{d}{dx}(x y') + \left(x - \frac{\lambda^2}{x}\right) y = 0.$$

Lényegesen egyszerűbben végezhetjük azonban el — STURM összehasonlító tételére támaszkodva — a zérushelyek eloszlásának vizsgálatát, ha az $y(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx} \cdot z(x)$ reláció révén új függő változót vezetve be, olyan egyenletet kapunk, amelyben z' nem szerepel:

$$z'' + \left[1 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right] z = 0; \qquad z = \sqrt{x} \cdot y,$$

ahol z és y összefüggése olyan, hogy egy helyütt vannak a zérushelyeik, kivéve esetleg az $x = 0$ helyet.

A legutóbbi egyenlethez könnyen adhatunk egy-egy olyan — zárt alakban is megoldható — egyenletet, amelynek megoldásai, STURM tétele alapján, zérushelyeikkel közrefogják $z(x)$-éit, illetve zérushelyeit $z(x)$ zérushelyei közrefogják:

$$u'' + (1 + \varepsilon) u = 0; \quad v'' + (1 - \varepsilon) v = 0 \quad (\varepsilon > 0),$$

ahol is az első egyenlettel kapcsolatban

$$1 \geqq 1 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{x^2}, \qquad \text{ha} \quad \lambda \geqq \frac{1}{2},$$

illetve

$$1+\varepsilon \geqq 1+\frac{\frac{1}{4}-\lambda^2}{x^2}, \quad \text{ha} \quad 0 \leqq \lambda \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{és} \quad |x| \geqq \xi(\varepsilon;\lambda),$$

és hasonlóan,

$$1-\varepsilon \leqq 1-\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{x^2}, \quad \text{ha} \quad |x| \geqq \xi_2(\varepsilon;\lambda).$$

2. Határozzuk meg az

$$y''+\frac{1}{x}y'+\lambda(\lambda+1)=0$$

egyenlet megoldásainak zérushely-eloszlását.

3. Határozzuk meg az

$$y''+\frac{\alpha}{x^\lambda}y=0 \qquad (\lambda>0)$$

egyenlet megoldásainak zérushely-eloszlását.

Útbaigazítás: Az $y''+\frac{\alpha}{x^2}y=0$ EULER-egyenlet zárt alakban is megoldható. Ezzel összehasonlítható a tekintett egyenlet.

β) 1. Igazoljuk, hogy a

$$\frac{d^2w}{dz^2}-\frac{1}{z}w=0$$

differenciálegyenlet bármely olyan megoldása, amely kielégíti a $\lim_{z\to 0} w(z)=0$ feltételt, csakis a valós tengely negatív szakaszán rendelkezhet zérushellyel.

2. Tekintsük a BESSEL-féle differenciálegyenletet:

$$w''+\frac{1}{z}w'+\left(1-\frac{\lambda^2}{z^2}\right)w=0$$

λ valós értéke mellett. Van-e ennek olyan, a valós tengelyen legalább egy zérushellyel rendelkező megoldása, amelynek vannak komplex gyökhelyei is? És a valós tengelyen valós értékeket felvevő megoldásai rendelkezhetnek-e komplex gyökhellyel?

b)

1. Származtassunk a (0, 1) intervallumon ortogonális függvényrendszert a $p>1$-ed rendű BESSEL-differenciálegyenlet segítségével, és fejtsük sorba eszerint az $y=x^l$ függvényt. A függvényhez konvergál a kapott sor?

Útbaigazítás: Tekintsük a

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(\lambda^2-\frac{p^2}{x^2}\right)y=0$$

(ún. *módosított* BESSEL-féle) differenciálegyenlet és az

$$y(0) = y(1) = 0$$

(ún. első fajú) mellékfeltételek által definiált STURM—LIOUVILLE-féle sajátérték-problémát; a differenciálegyenletet, x-szel szorozva, önadjugált alakba írhatjuk:

$$\frac{d}{dx}(x\,y') + \left(\lambda^2 x - \frac{p^2}{x}\right) y = 0.$$

A sajátfüggvények eszerint a $g(x) = x$ súlyra ortogonális függvényrendszert szolgáltatnak. Az eredeti differenciálegyenletben bevezetve a $z = \lambda\,x$ új független változót, a sajátérték-probléma könnyen megoldhatóvá válik, hiszen az adódó differenciálegyenlet λ^2-tal osztható:

$$\lambda^2 \frac{d^2y}{dz^2} + \lambda^2 \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + \lambda^2\left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) y = 0.$$

Az egyik megoldás tehát: $J_p(z) = J_p(\lambda x)$, ahol a J_p függvénynek, mint azt a 7. § *a) α)* 1. feladatban láttuk, végtelen sok zérushelye van. Az első határfeltétel λ bármely értékére automatikusan teljesül, lévén $J_p(0) = 0$, a második pedig akkor, ha λ a J_p-függvény valamelyik, pl. k-adik zérushelye, amit így jelölünk: $x_{p,k}$. A sajátfüggvényrendszer tehát

$$J_p(x, x_{p,k}); \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

A sorfejtés a sorba fejtett függvényhez konvergál, hiszen a megadott elégséges feltételek teljesülnek.

A sorfejtésben fellépő

$$\int_0^1 x^p\, J_p(x \cdot x_{p,k}) \cdot x\, dx$$

integrált a $\frac{d}{dx}\left(x^{p+1} J_{p+1}(x)\right) = x^{p+1} J_p(x)$ ismert formula alapján (lásd a 6. § *d) α)* 1. feladatot) számíthatjuk, míg az

$$\int_0^1 J_p^2(x \cdot x_{p,k}) \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} J_p'^2(x_{p,k})$$

integrált az $x\,J_p[x_{p,k}\,x] \cdot J_p[x \cdot x_{p,l}]$ primitív függvényének megállapítása révén (l. a 6. § *d) α)* 8. feladatot), majd az $x_{p,l} \to x_{p,k}$ határátmenet végrehajtásával.

2. Igazoljuk, hogy az

a) LEGENDRE-féle

$$(1 - x^2)\,y'' - 2\,x\,y' + \lambda(\lambda + 1)\,y = 0,$$

illetve a *b)* JACOBI-féle:

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x)^{p+1} \cdot (1 + x)^{q+1} \cdot \frac{dy}{dx}\right] + \lambda(1 - x)^p\,(1 + x)^q\,y = 0$$

differenciálegyenletek segítségével ortogonális polinomsorozat származtatható. Adjuk meg az ortogonalitási intervallumot és a súlyfüggvényt.

2. §. NÉHÁNY FONTOS FÜGGVÉNYTANI FOGALOMRÓL

a)

β) 2. Az első függvény a $\mathrm{Re}\, z > 0$, a második a $\mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, \alpha$ félsíkon értelmezett, és ugyanitt regulárisak is. Mindkettő analitikusan folytatható az egész számsíkra; analitikus folytatásuk:

$$n!\, z^{-(n+1)}, \qquad \text{illetve} \qquad (z-\alpha)^{-\lambda}.$$

3. A függvény a $\mathrm{Re}\, z > 0$ félsíkon értelmezett, és ugyanitt reguláris. Az egész számsíkra kiterjeszthető analitikusan, éspedig pl. úgy, hogy az integrációs tartományt két részre bontva, a [0, 1] szakaszon e^{-t}-t MACLAURIN-sorba fejtjük, és az összegezés és integráció sorrendjét felcseréljük. Ez a $\mathrm{Re}\, z > 0$ feltétel mellett megengedett — azaz így $\Gamma^*(z)$ egy más alakú előállítását kapjuk. Minthogy azonban az új alak az egész számsíkon értelmezett függvény, ott $\Gamma^*(z)$ analitikus folytatását adja.

7. A konvergenciakör az egységkör; e tartományon túl f_1 nem folytatható analitikusan.

8. B az az origót belsejében tartalmazó poligon, amelynek oldalélei az $f(z)$ egyes szinguláris pontjain átmenő, e pontok helyvektoraira merőleges egyenesek, és amelyet az összes így szerkeszthető poligonok teljesen lefednek.

b)

2. L. pl. P. LÉVY cikkét a *Nouv. Annales* Bd. (4) 5. (1905) 506. l.-on, vagy E. STEINITZ-ét: Bedingt konvergente Reihen u. konvexe Systeme, *J. f. d. reine u. angew. Math.* Bd. 143. (1913), illetve Bd. 144. (1914), illetve Bd. 146. (1955).

4. Igen.

5. L. pl. PRINGSHEIM cikkét az *Archiv d. Math. u. Phys.* (3) 4. 1902. 1—19. lapján, illetve GMEINERét a *Monatshefte f. Math. u. Phys.* Bd. 19. (1908) 149—163. lapján.

7. A szorzat csak $z = 0$ esetén konvergál; az előző feladat konvergenciakritériumát alkalmazhatjuk.

9. Felhasználjuk az $F_x(x\,z)\cdot(1+x\,z) \equiv F_x(z)$, illetve a $\Phi_x(z) \equiv \Phi_{x^2}(x\,z)\cdot(1+x\,z)$ függvényegyenleteket. Mindkét függvény $|x|<1$ esetén az egységkörben, $|x| \geqq 1$ esetén csak a $z=0$ pontban értelmezett; előbbi esetben ugyanitt reguláris is. Tehát $|x|<1$ esetén:

$$F_x(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu \cdot \prod_{k=1}^{\nu} \frac{x^k}{1-x^k}; \qquad \Phi_x(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu \cdot \prod_{k=1}^{\nu} \frac{x^{2k-1}}{1-x^{2k}}.$$

15. $e^{az} = 1 + aw + \frac{a(a-2b)}{2!}w^2 + \frac{a(a-3b)^2}{3!}w^3 + \frac{a(a-4b)^3}{4!}w^4 + \ldots;$

ha $|w| < \frac{1}{|b| \cdot e}$.

16. $z = 1 + w + 3\frac{w^2}{2!} + 4^2\frac{w^3}{3!} + 5^3\frac{w^4}{4!} + 6^4\frac{w^5}{5!} + \ldots,$ ha $|w| < \frac{1}{e}$.

17. $E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}}(\sin^n M).$

18. f az egész számsíkon reguláris.

19. Az összeg az egységkör-kerület egyetlen pontjában sem konvergál. A $|z| < 1$ tartományban konvergens, és összege az $\frac{1}{(1-z)^2}$ függvény. A $|z| > 1$ tartományban szintén konvergál, összege itt az $\frac{1}{z(1-z)^2}$ függvény. Az egységkör ún. lakunáris vonala a sornak.

c)

β) 2. $w = 1 + 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^2 - k^2\pi^2}$.

4. a) $\operatorname{cosec}^2 z \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z - n\pi)^{-2}$; b) $\operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2 + n^2\pi^2}$;

c) $\frac{2}{e^z - e^{-z}} \equiv \frac{1}{z} + 2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^2 + k^2\pi^2}$.

5. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2 + (z + n\pi)^2} \equiv \frac{\operatorname{sh} 2a}{\operatorname{ch} 2a - \cos 2z}$.

6. a) $\operatorname{tg} z \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2z}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\pi^2 - z^2}$; b) $\frac{\sin z}{\cos^2 z} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left[z - (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]^2}$;

c) $\frac{\pi^2}{\cos^2\pi z} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(z + \frac{1}{2} - n\right)^{-2}$;

d) $\frac{e^{az}}{e^z - 1} \equiv \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z\cos 2\pi n a - 4\pi n \sin 2\pi n a}{z^2 + 4n^2\pi^2}$; $(0 < a < 1)$;

e) $[\operatorname{ch} 2z - \cos 2z]^{-1} \equiv \frac{1}{4z^2} + 4\pi z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot n}{\operatorname{sh}\pi n}\cdot\frac{1}{4z^4 + n^4\pi^4}$;

f) $\frac{z\sin z}{\sin z - z\cos z} \equiv \frac{3}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2 - \lambda_n^2}$,

ahol λ_n jelenti a $\operatorname{tg}\lambda = \lambda$ egyenlet n-edik pozitív gyökét $\left(:\lambda_n < \lambda_{n+1};\ \pi < \lambda_1 < 3\frac{\pi}{2}\right)$.

d

β) 2. a) $\cos\frac{\pi z}{2} \equiv \prod_{n=0}^{\infty}\left[1-\frac{z^2}{(2n+1)^2}\right]$;

b) $\operatorname{ch} z - \cos z \equiv z^2 \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^4}{4\pi^4 n^4}\right)$;

c) $\sin z - z\cos z \equiv \frac{z^2}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$,

(λ_n jelentése ugyanaz, mint 3 sorral feljebb);

d) $\frac{\sin \pi z}{\pi z(1-z)} \equiv \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-z^2}{n+n^2}\right)$.

5. L. az előző (4) feladat megoldását! $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$,

ahol $c_0 = 1; c_1 = -\frac{1}{a(a+1)}$; általában $c_n = \frac{(1-a)c_{n-1} - c_{n-2}}{a(a^{2n}-1)}$, ha $n \geqq 2$.

6. $h(z) \equiv e^{-\frac{1}{\pi} z \ln 2} \cdot \sin z$.

8. $g(z; k, n) \equiv$

$$\equiv \frac{\prod_{g=1}^{\frac{1}{2}n}\{1-2e^{-\alpha_g}\cdot\cos(z+\beta_g)+e^{-2\alpha_g}\}^{\frac{1}{2}}\cdot\{1-2e^{-\alpha_g}\cdot\cos(z-\beta_g)+e^{-2\alpha_g}\}^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\cdot(1-\cos z)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{-k\cos\frac{\pi}{n}}},$$

ahol $\alpha_g = k\sin\frac{2g-1}{n}\pi$; $\beta_g = k\cos\frac{2g-1}{n}\pi$.

10. $g(z) \equiv \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(z+k)}$.

11. $\operatorname{tg} z \equiv \frac{z\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4z^2}{\pi^2(2n-1)^2}\right]}$.

e)

α) 2. $f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\cdot\left[(-1)^{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k^{n-1}c^k\right]$;

$$|f(z) - S_n(z)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{k}{z}\right)^{n+1}\frac{c^k}{z+k}\right| < z^{-(n+2)}\sum_{k=1}^{\infty}k^n\cdot c^k.$$

Megjegyezzük, hogy az útbaigazításként említett „átrendezés" nem „legális" művelet — ti. nem hagyja változatlanul a sorösszeget —, ami abból is látható, hogy divergens sort kaptunk.

3. a) $f(z) \sim \frac{1}{2z} - \frac{1}{2^2 z^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot z^5} - \frac{5!!}{2^4 \cdot z^7} + \frac{7!!}{2^5 \cdot z^9} - + \ldots$;

b) $g(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - + \ldots$;

c) $h(z) \sim \frac{1}{z} + \frac{a-1}{z^2} + \frac{(a-1)(a-2)}{z^3} + \frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{z^4} + \ldots$.

β) 2. $$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\sigma} \sim \frac{1}{(\sigma-1)\, n^{\sigma-1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^\sigma} + \frac{B_1}{2!} \frac{\sigma}{n^{\sigma+1}} - \frac{B_2}{4!} \frac{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)}{n^{\sigma+3}} \pm$$

$$\pm \ldots + (-1)^{p-1} \frac{B_p}{(2p)!} \cdot \frac{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+2p-2)}{n^{\sigma+2p-1}} \pm \ldots$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\sigma} - S_p = (-1)^{p-1} \int_n^{\infty} B_{2p+1}(x) \cdot \frac{\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+2p)}{x^{\sigma+2p+1}}\, dx.$$

3. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \sim C + \frac{1}{2n} - \frac{B_1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \pm \ldots + \frac{(-1)^{p-1} B_{p-1}}{(2p-2)\, n^{2p-2}} \pm \ldots,$$

ahol C az ún. EULER-állandó: $C = \lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right\}$.

5. a) 0,9375; b) 0,1013; c) 0,6049.

γ) 2. $$I_n^* = \frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left(\frac{1}{n B_0} \right)^{\frac{a+\nu}{p}} \cdot e^{i\Psi_0(a+\nu)} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{g^{\nu,\mu}}{(-b_0)^\mu} \int_0^{n B_0 r_0^p} e^{-t} \cdot t^{\frac{a+\nu}{p}+\mu-1}\, dt,$$

ahol $g_{\nu,0} = a_\nu$, illetve általában $g^{\nu,\mu}$ az $\frac{1}{\mu!}(a_0 + a_1 z + \ldots) \cdot (b_1 z + b_2 z^2 + \ldots)^\mu$ függvény MACLAURIN kifejtésében z^ν együtthatóját jelöli.

4. $$\Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right].$$

5. $$I_n = e^{nf(-\alpha)} \sqrt{\frac{2\pi}{n \operatorname{sh} \alpha}} \cdot \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right],$$

illetve

$$I_n = e^{nf(-\alpha)} \sqrt{\frac{2\pi}{n \operatorname{sh} \alpha}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(1 - \frac{5 \operatorname{ch}^2 \alpha}{3 \operatorname{sh}^2 \alpha} \right) \frac{1}{n \operatorname{sh} \alpha} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right].$$

6. a) $$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[1 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{32\, x^2} + O\left(\frac{1}{x^3} \right) \right];$$

b) $$G(x) = \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\pi} \cdot \sqrt[4]{x}} \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^\nu}{(4\sqrt{x})^\nu} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)} + O\left(\frac{1}{x^{\frac{n}{2}}} \right) \right].$$

3. §. A GAMMA- ÉS A BÉTAFÜGGVÉNY

a)

α) 1. $F(-k) = \dfrac{(-1)^k}{k!} \cdot \dfrac{1}{z+k}$.

2. $P(x+1) \equiv x \cdot P(x) - \dfrac{1}{e}$; $\quad P(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^\nu}{\nu!\,(x+\nu)}$.

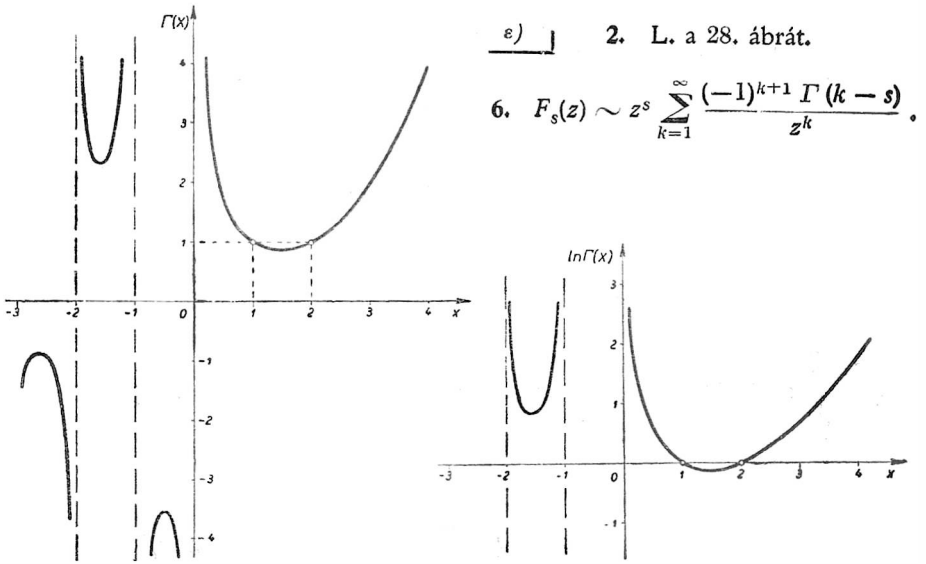
β—γ) 10. $A - 1 < x < 1$ intervallumon. Itt

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} t^{x-1} \sin t\, dt = \operatorname{cosec} \frac{\pi(1-x)}{2} \cdot \Gamma^{-1}(1-x).$$

16. *a)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{zv} \cdot e^{-e^v}\, dv \equiv \Gamma(z)$; $\qquad$ *b)* $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^z}\, dt \equiv \Gamma\left(1 + \frac{1}{z}\right)$.

ε) 2. L. a 28. ábrát.

6. $F_s(z) \sim z^s \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}\,\Gamma(k-s)}{z^k}$.



28. ábra.

μ) 2. $$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(a+b+n)}{(a+n)(b+n)} = \frac{\Gamma(a+1)\cdot\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}.$$

4. $$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n\cdot z}{n}\right] = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{2}\right)}.$$

5. $$\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right] = \left\{\frac{\Gamma(\alpha)}{|\Gamma(\alpha+i\beta)|}\right\}^2.$$

7. $$\int_0^{\infty}\left\{\frac{z-1}{e^t}+\frac{(1+t)^{-z}-(1+t)^{-1}}{\ln(1+t)}\right\}\frac{dt}{t} \equiv \Gamma(z).$$

8. a) $$\int_0^{\infty}\frac{\sin b\,x}{x^z}\,dx = \frac{1}{2}\pi\, b^{z-1}\cdot\frac{\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{\Gamma(z)};$$

b) $$\int_0^{\infty}\frac{\cos b\,x}{x^z}\,dx = \frac{\pi}{2}\, b^{z-1}\cdot\frac{\sec\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{\Gamma(z)};$$

c) $$\int_0^{\infty}\frac{x\cdot e^{-xz}}{1-e^{-x}}\,dx = \frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z).$$

b)

δ) 2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\varphi\cdot\cos^{2y-1}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}B(x,y).$$

7. $$I_z = \frac{4}{15}(a^2+b^2)\,\pi\,a\,b\,c.$$

8. $$\int_0^{\frac{2}{\pi}}(\cos^{p+q-2}t\cdot\cos(p-q)\,t\,dt = \frac{\pi}{(p+q-1)\,2^{p+q-1}\cdot B(p;q)}.$$

c)

1. $$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(n-\alpha)(n+\beta+\gamma)}{(n+\beta)(n+\gamma)}\left(1+\frac{\alpha}{n+1}\right) = -\frac{1}{\pi}\sin\alpha\,\pi\,B(\beta;\gamma).$$

7. Az

$$y(x) = \begin{cases} y(-x), & \text{ha} \quad -\frac{\pi}{a} \leqq x \leqq 0 \\ \cos^s x, & \text{ha} \quad 0 \leqq x < \frac{\pi}{2a} \\ -\cos^s x, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2a} < x \leqq \frac{\pi}{a} \\ y\left(x + k\,2\frac{\pi}{a}\right); \; k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots \end{cases}$$

függvény FOURIER-sorát adtuk.

8. *a)* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{a(b+xi)} \frac{dx}{(b+xi)^{z+1}} \equiv \frac{a^z}{\Gamma(1+z)}$; *b)* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-a(b+xi)}}{(b+xi)^{z+1}}\,dx \equiv 0$.

4. §. ELLIPTIKUS FÜGGVÉNYEK ÉS INTEGRÁLOK

a)

β) 2. A primitív periódus $2\pi i$ nagyságú; $w \equiv \sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{pz}}{p!}$.

3. A primitív periódus ϱ nagyságú; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e^{-2n\frac{\pi}{\varrho}z} \equiv e^{-e^{-2\frac{\pi}{\varrho}z}}$.

4. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n\pi z}}{(n+1)!} \equiv e^{\pi z}\left[e^{e^{-\pi z}} - 1\right]$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n e^{-n\frac{\pi}{\varphi}z}}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\frac{\pi}{\varphi}z}}{(n-1)!} \equiv e^{q\cdot e^{-\frac{\pi}{\varphi}z}} - e^{\frac{\pi}{\varphi}z} \cdot e^{e^{\frac{\pi}{\varphi}z}}$.

b)

α) 5. $z \equiv \pm u$; $z \equiv \pm v$, mod (ω_1, ω_2).

6. Egyszeres pólushelyek: $z \equiv -u$; $z \equiv -v$, mod (ω_1, ω_2).
Egyszeres zérushelyek: $z \equiv 0$; $z \equiv -(u+v)$, mod (ω_1, ω_2).

β) 8. Valamennyi kifejezés azonosan 0.

γ–δ) 8. $f(z) \equiv \frac{\sigma(3z)}{\sigma^9(z)}$.

ε) 2.

$v =$	$v_0 + \frac{1}{2}$	$v_0 + \frac{\tau}{2}$	$v_0 + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$	$v_0 + 1$	$v_0 + \tau$	$v_0 + 1 + \tau$
ϑ_1	ϑ_2	$i\,m\,\vartheta_0$	$m\,\vartheta_3$	$-\vartheta_1$	$-k\,\vartheta_1$	$k\,\vartheta_1$
ϑ_2	$-\vartheta_1$	$m\,\vartheta_3$	$-i\,m\,\vartheta_0$	$-\vartheta_2$	$k\,\vartheta_2$	$-k\,\vartheta_2$
ϑ_3	ϑ_0	$m\,\vartheta_2$	$i\,m\,\vartheta_1$	ϑ_3	$k\,\vartheta_3$	$k\,\vartheta_3$
ϑ_4	ϑ_3	$i\,m\,\vartheta_1$	$m\,\vartheta_2$	ϑ_0	$-k\,\vartheta_0$	$-k\,\vartheta_0$

ahol is $m = h^{-\frac{1}{4}} \cdot u^{-1} = e^{-\left(i\frac{\pi}{4}\tau + i\pi v\right)}$; $k = h^{-1} \cdot u^{-2} = e^{-(i\pi\tau + 2i\pi v)}$.

5. $\vartheta_1(v=0)=0;\quad \vartheta_2\left(v=\frac{1}{2}\right)=0;\quad \vartheta_3\left(v=\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=0;\quad \vartheta_0\left(v=\frac{\tau}{2}\right)=0.$

6. $\wp(z)\equiv e_3+\frac{1}{4\omega^2}\cdot\left[\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_0(0)}\right]^2\left[\frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_1(v)}\right]^2.$

c)

α) 1. $\operatorname{sn}(z)\equiv 2\omega\,\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_0'(0)}\,\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)};\quad \operatorname{cn}(z)\equiv\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)}\,\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)};\quad \operatorname{dn}(z)\equiv\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}\,\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}$

4.

$z=$	$z_0+\omega$	$z_0+\omega'$	$z_0+\omega+\omega'$	$z_0+2\omega$	$z_0+2\omega'$	$z_0+2\omega+2\omega'$
sn	$\frac{\operatorname{cn}(z_0)}{\operatorname{dn}(z_0)}$	$\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\operatorname{sn}(z_0)}$	$\frac{1}{k}\,\frac{\operatorname{dn}(z_0)}{\operatorname{cn}(z_0)}$	$-\operatorname{sn}(z_0)$	$\operatorname{sn}(z_0)$	$-\operatorname{sn}(z_0)$
cn	$-k'\,\frac{\operatorname{sn}(z_0)}{\operatorname{dn}(z_0)}$	$-\frac{i}{k}\,\frac{\operatorname{dn}(z_0)}{\operatorname{sn}(z_0)}$	$-i\,\frac{k'}{k}\,\frac{1}{\operatorname{cn}(z_0)}$	$-\operatorname{cn}(z_0)$	$-\operatorname{cn}(z_0)$	$\operatorname{cn}(z_0)$
dn	$k'\,\frac{1}{\operatorname{dn}(z_0)}$	$-i\,\frac{\operatorname{cn}(z_0)}{\operatorname{sn}(z_0)}$	$ik'\,\frac{\operatorname{sn}(z_0)}{\operatorname{cn}(z_0)}$	$\operatorname{dn}(z_0)$	$-\operatorname{dn}(z_0)$	$-\operatorname{dn}(z_0)$

8. $\wp'(z)\equiv -2\,\frac{(e_1-e_3)^{3/2}\cdot\operatorname{cn}\left(\sqrt{e_1-e_3}\cdot z\right)\operatorname{dn}\left(\sqrt{e_1-e_3}\cdot z\right)}{\operatorname{sn}^3\left(\sqrt{e_1-e_3}\cdot z\right)}.$

β) 3. $\operatorname{sn}(z)=z-\frac{1}{3!}(1+k^2)\,z^3+\frac{1}{5!}(1+14k^2+k^4)\,z^5\pm\dots$

$$\operatorname{cn} z=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}(1+4k^2)\,z^4\pm\dots$$

$$\operatorname{dn} z=1-\frac{1}{2!}k^2z^2+\frac{1}{4!}(4k^2+k^4)\,z^4\pm\dots.$$

4. A határértékek rendre a következők: $\frac{2}{1+k^2}$; $\frac{1+k^2}{6}$; $\frac{1-2k^2}{6}$.

9. *a)* $\int\operatorname{sn}(z)\,dz=\frac{1}{2k}\ln\frac{\operatorname{dn}(z)-k\operatorname{cn}(z)}{\operatorname{dn}(z)+k\operatorname{cn}(z)}$;

b) $\int\frac{\operatorname{dn}(z)}{\operatorname{sn}(z)}\,dz=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\operatorname{cn}(z)}{1+\operatorname{cn}(z)}$; *c)* $\int\frac{dz}{\operatorname{dn}(z)}=\frac{1}{k'}\operatorname{arctg}\left[k'\,\frac{\operatorname{sn}(z)}{\operatorname{cn}(z)}\right]$;

d) $\int\operatorname{cn}(z)\,dz=\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\left[k\,\frac{\operatorname{cn}(z)}{\operatorname{dn}(z)}\right]$; *e)* $\int\frac{\operatorname{sn}(z)}{\operatorname{cn}(z)}\,dz=\frac{1}{2k'}\ln\frac{\operatorname{dn}(z)+k'}{\operatorname{dn}(z)-k'}$;

f) $\int\frac{\operatorname{dn}(z)}{\operatorname{cn}(z)}\,dz=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{sn}(z)}{1-\operatorname{sn}(z)}$; *g)* $\int\frac{\operatorname{dn}(z)}{1+\operatorname{cn}(z)}\,dz=\frac{\operatorname{sn}(z)}{1+\operatorname{cn}(z)}$.

13. A primitív periódusok: $2K = 2\omega$ és $2iK' = 2\omega'$; a négy egyszeres zérushely a $\pm u$ és $\pm v$ helyekkel kongruens, mod $(2K; 2iK')$.

14. Az sn (z) függvény pólushelyei (az origo csúcspontú periódus-paralelogrammában): ω' és $2\omega + \omega'$, a megfelelő reziduumok pedig: $\frac{1}{k}$; $-\frac{1}{k}$. A cn (z) függvényei: $2\omega + \omega'$; $4\omega + \omega'$, a reziduumok pedig: $\frac{i}{k}$; $-\frac{i}{k}$. Végül a dn (z) függvényei: ω' és $3\omega'$, $-i$, illetve i reziduummal.

15. $$\int_0^K \frac{\mathrm{sn}^3(u)\,du}{[1+\mathrm{cn}(u)]\,\mathrm{dn}^2(u)} = \frac{1}{k'^2\cdot(1+k')}.$$

γ) **1.** $\lim\limits_{s\to+\infty} \omega = \frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{s\to\infty} \omega' = \infty$.

δ) **3.** $\mathrm{sn}(z+iK') \equiv \frac{1}{k\,\mathrm{sn}(z)}$; $\mathrm{cn}(z+iK') \equiv -\frac{i}{k}\frac{\mathrm{dn}(z)}{\mathrm{sn}(z)}$;

$$\mathrm{dn}(z+iK') \equiv -i\frac{\mathrm{cn}(z)}{\mathrm{sn}(z)}.$$

5. w ezalatt az egységkör egy kvadránsát futja be.

d)

β) **2.** $$\int_0^z \frac{(1+2x)\,dx}{\sqrt{(x-1)(x^2+2x+3)}} =$$

$$= (2\sqrt[4]{6}+3)\left[F\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}};\ 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{z-1}{\sqrt{6}}}\right) - F\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}};\ 2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\right)\right] -$$

$$- 4\sqrt[4]{6}\left[E\left(\frac{3-\sqrt{6}}{6};\ 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{z-1}{\sqrt{6}}}\right) - E\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}};\ 2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\right)\right] +$$

$$+ 4\sqrt[4]{6}\left[\sqrt{\frac{z-1}{\sqrt{6}}}\sqrt{1-\frac{3-\sqrt{6}}{3}\cdot\sqrt{\frac{(z-1)\frac{1}{\sqrt{6}}}{1+\frac{(z-1)}{\sqrt{6}}}}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt[4]{6}}\sqrt{1-\frac{3-\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{6}\left(1-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)}}\right].$$

4. $\int_0^x \sqrt{\cos\xi}\,d\xi = 2\sqrt{2}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \arccos\sqrt{\cos x}\right) - \sqrt{2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \arccos\sqrt{\cos x}\right)$

5. *a)* $\int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2+x)(\beta^2+x)(\gamma^2+x)}} =$

$$= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}\,F\left(\sqrt{\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\gamma^2}};\ \arcsin\sqrt{\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2+z}}\right).$$

b) $\int_{-1}^{z} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\,F\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\ 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{z+1}{\sqrt{3}}}\right).$

6. A következő értékek adódnak:

a) $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\,\frac{1}{1+k}\,K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$, ahol $k = \sin 15°$; *b)* $\frac{2}{3}K\left(\frac{1}{3}\right)$;

c) $K\left(\frac{1}{2}\right)$; *d)* $\frac{2}{3}K\left(\frac{1}{3}\right)$; *e)* $\frac{1}{\sqrt{3}}K\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; *f)* $\frac{16}{5}K\left(\frac{1}{5}\right)$.

γ–δ) 3. $K(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n}\right\}$; $K'(k') = K(k')$;

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n}\right\};\qquad E'(k') = E(k').$$

4. $\frac{dK}{dk} = \frac{E}{k\cdot k'^2} - \frac{K}{k}$; $\frac{dK}{dk'} = -\frac{E}{k^2 k'} + \frac{k' K}{k^2}$; $\frac{dK'}{dk} = -\frac{E'}{k'^2 k} + \frac{k K'}{k'^2}$; ... .

5. $\frac{dK}{\mathrm{d}n} = \frac{E - n' K}{2 n n'}$; $\frac{dE}{\mathrm{d}n} = \frac{E - K}{2n}$.

8. Az integrálértékek: *a)* $\frac{1}{k'^2(1+k')}$;

b) $\frac{\operatorname{sn}(u)\operatorname{dn}(u)}{1+\operatorname{cn}(u)} + u - E[k;\ \arcsin \operatorname{sn}(u)]$.

11. M-mel jelölve a skatulyázás magvát, $K = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{M}$. Az $a_1 = 1$, $b_1 = k$ választásnál M^*-gal jelölve a skatulyázás magvát,

$$K' = \frac{\pi}{2}(M^*)^{-1}.$$

12. $\tau = i\frac{K'}{K}$.

13. $K(k) = \frac{2}{1+k'}K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)$.

e)

α) 2. $s = a\,E(e;\ \varphi)$. 3. $s = 2\sqrt{2}\,a\,K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

4. $$s = \frac{c}{\xi}\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)} + c\,k'^2\{F(k;\ \xi) - K(k)\} - c\{E(k;\ \xi) - E(k)\},$$

ahol $c = \sqrt{a^2+b^2}$; $k = \frac{a}{c}$.

6. $$\lambda = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 4\,\wp(\alpha); \qquad \mu = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 4\,\wp(\beta);$$

$$\nu = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 4\,\wp(\gamma); \qquad x^2 = 4\,\frac{[\wp(\alpha)-e_1][\wp(\beta)-e_1][\wp(\gamma)-e_1]}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)};$$

$$y^2 = 4\,\frac{[\wp(\alpha)-e_2][\wp(\beta)-e_2][\wp(\gamma)-e_2]}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}; \ldots,$$

ahol is e_1, e_2, illetve e_3 a $\varrho = \varrho(t) = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 4t$ reláció révén bevezetett új változóra vonatkozó gyökhelyei az $f[\varrho(t)] = 0$ egyenletnek.

β) 4. L. pl. F. Oberhettinger u. W. Magnus: *Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik u. Technik* c. könyvének 69—71. lapját.

5. §. A KOMPLEX SÍKON ÉRTELMEZETT LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

a)

α) 4. Igen: $w = F\left(-\frac{n}{2};\ \frac{n+1}{2};\ \frac{1}{2};\ z^2\right)$. Polinommegoldást akkor és csakis akkor kapunk, ha n természetes szám, és vagy a $w(0) = w_0$; $w'(0) = 0$, vagy a $w(0) = 0$; $w'(0) = w_0'$ kezdeti feltételrendszert tekintjük.

5. $w_{\mathrm{I}} = 1 - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1\cdot 4}{6!}z^6 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}z^9 + - \ldots;$

$w_{\mathrm{II}} = z - \frac{2}{4!}z^4 + \frac{2\cdot 5}{7!}z^7 - \frac{2\cdot 5\cdot 8}{10!}z^{10} + - \ldots;$

6. *a)* $w_{\mathrm{I}} = 1 - \frac{z^3}{2\cdot 3} - \frac{4}{3}\frac{z^6}{5\cdot 6} - \frac{4\cdot 7}{3\cdot 6}\frac{z^9}{8\cdot 9} - \ldots; \qquad w_{\mathrm{II}} = z;$

b) $w_{\mathrm{I}} = 1 - \frac{z^2}{2}; \qquad w_{\mathrm{II}} = z - \frac{3}{4}z^2;$

c) $w_{\mathrm{I}} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots; \qquad w_{\mathrm{II}} = z + z^3 + \ldots.$

7. *a)* $w_{\mathrm{I}} = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\ z^\nu}; \qquad w_{\mathrm{II}} = e^{-\frac{2}{z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-2)^\nu}{\nu!\ z^\nu};$

b) $w_{\mathrm{I}} = \cos\left(\frac{a}{z}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu\cdot a^{2\nu}}{(2\nu)!\ z^{2\nu}}; \qquad w_{\mathrm{II}} = \sin\left(\frac{a}{z}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu a^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!\ z^{2\nu-1}};$

c) $w_{\mathrm{I}} = \frac{z^2}{z^2-1} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \ldots; \qquad w_{\mathrm{II}} = \frac{1}{z}w_{\mathrm{I}}.$

β—γ) 5. *a)* $(1+z^2)w'' - 2w = 0;$ *b)* $(z-1)w'' - z\,w' + w = 0.$

b)

α—β) **5.** A 0, 1, ∞-ben — és csakis itt — vannak a — nem-lényegesen — szinguláris pontok. Egy-egy alapmegoldás-rendszer:

a) A $z = 0$ pont környezetében a „γ nem egész szám" feltétel mellett:

$$w_I = F(\alpha, \beta, \gamma; z); \qquad w_{II} = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z).$$

b) A $z = 1$ pont környezetében, a „$\gamma - \alpha - \beta$ nem egész szám" feltétel mellett:

$$w_I = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - z);$$

$$w_{II} = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z).$$

c) A végtelen távoli pontban, az „$\alpha - \beta$ nem egész szám" feltétel mellett:

$$w_I = z^{-\alpha} F\left(\alpha, 1 + \alpha - \gamma, 1 + \alpha - \beta; \frac{1}{z}\right);$$

$$w_{II} = z^{-\beta} F\left(\beta, 1 + \beta - \gamma, 1 + \beta - \alpha; \frac{1}{z}\right).$$

Polinom típusú megoldást akkor kapunk, ha egyrészt $\gamma = 1 + m$ alakú, ahol m nemnegatív egész, másrészt α és β közül legalább az egyik egy m-nél nem nagyobb, nemnegatív egész szám, vagy ha $\gamma = 1 - m$ alakú (m természetes szám), és α és β közül legalább az egyik egy $-m$ és -1 közötti (negatív) egész szám.

6. $w = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \cdot W.$

7. *a)* $$w_I = z + \frac{z^3}{2 \cdot 7} + \frac{z^5}{2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{z^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15} + \ldots;$$

$$w_{II} = \frac{1}{\sqrt{z}} \left(1 + \frac{z^2}{2 \cdot 1} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 5} + \frac{z^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9} + \ldots\right);$$

b) $$w_I = \frac{1}{z}; \qquad w_{II} = \frac{1}{z} \ln \frac{1}{1 - z};$$

c) $$w_I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^2}; \qquad w_{II} = w_I \ln z - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right];$$

d) $$w_I = z\, e^{-z};$$

$$w_{II} = w_I \ln z - 1 - z + z^2 - z^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right);$$

e) $$w_I = \frac{1}{\sqrt{z}} \operatorname{sh} \frac{z}{2}; \qquad w_{II} = \frac{1}{\sqrt{z}} \operatorname{ch} \frac{z}{2};$$

f) $$w_I = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^n z^{2n}}{(n!)^2\, 2^{2n}};$$

$$w_{II} = w_I \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{m^n z^{2n}}{(n!)^2\, 2^{2n}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

8. *a)* $w_{\mathrm{I}} = \frac{1}{z} e^{\frac{a}{z}}$; $\quad w_{\mathrm{II}} = w_{\mathrm{I}} \ln z + \frac{1}{z} \sum_{1}^{\infty} \frac{a^n z^{-n}}{n!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$;

b) $w_{\mathrm{I}} = \frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z^2}}$; $\quad w_{\mathrm{II}} = w_{\mathrm{I}} \ln z + \frac{1}{2z^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{z^{-2n}}{n!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$.

9. *a)* $w_{\mathrm{I}} = \sqrt{z} \cdot J_1(2\sqrt{z})$; $\quad w_{\mathrm{II}} = \sqrt{z}\, G_1(2\sqrt{z})$;

b) $w_{\mathrm{I}} = z^{3/2} J_{\frac{5}{4}}(z^2)$; $\quad w_{\mathrm{II}} = z^{3/2} J_{\frac{5}{4}}(z^2)$;

c) $w_{\mathrm{I}} = z^{-n} J_n(z)$; $\quad w_{\mathrm{II}} = z^{-n} G_n(z)$.

γ–ε) 2. Akkor és csakis akkor, ha csak 3 szinguláris pontja van.

ε) 3. Nincs.

4. Igen: $w_{\mathrm{I}} = e^{iz} \cdot z^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{k} \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2} + k\right) \left(-\frac{i}{2z}\right)^k$;

$$w_{\mathrm{II}} = e^{iz} \cdot z^{-\frac{1}{2}} \sum_{0}^{\infty} \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{k} \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2} + k\right) \left(\frac{i}{2z}\right).$$

5. Igen: $w = e^{-\frac{z}{2}} \cdot x^{\lambda - \frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} c_k x^{-k}$.

6. Igen: $w = e^{-\frac{z}{2}} \cdot z^k \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{s=1}^{n} \left[m^2 - \left(k - n + \frac{1}{2}\right)^2\right]}{n!\, z^n}\right\}$.

μ) 7. Igen: $w = 1 + \left[4q - 28q^3 + \frac{2^7 \cdot 29}{9} q^5 - + \ldots\right] \cos 2z +$

$$+ \left[2q^2 - \frac{160}{9} q^4 + - \ldots\right] \cos 4z + \left[\frac{4}{9} q^3 - \frac{13}{3} q^5 + - \ldots\right] \cos 6z +$$

$$+ \left[\frac{1}{18} q^4 - + \ldots\right] \cos 8z + \left[\frac{q^5}{225} - + \ldots\right] \cos 10z + \ldots$$

$$a = a(q) = -32q^2 + 224q^4 - \frac{2^{10} \cdot 29}{9} q^6 + 0(q^8).$$

c)

α) 3. *a)* $w_{\mathrm{I;\,II}} = \int\limits_{C_{1,2}} e^{z\zeta}\,(\zeta-\alpha)^{-\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}-1}\cdot(\zeta-\beta)^{-\frac{\beta(\alpha+\beta)}{\beta-\alpha}}\,d\zeta,$

ahol C_1 az α és β pontokat közvetlenül, C_2 pedig a $-\infty$-en keresztül köti össze.

b) $w_{\mathrm{I}} = \int\limits_{-q}^{q} (\zeta^2-q^2)^{a-1}\,e^{z\zeta}\,d\zeta\,; \qquad w_{\mathrm{II}} = \int\limits_{-\infty}^{-q} (\zeta^2-q^2)^{a-1}\,e^{z\zeta}\,d\zeta.$

5. $y_1 + i\,z_1 = \int\limits_0^\infty e^{-t-xti}\,\frac{dt}{\sqrt{t}}\,; \qquad y_2 + i\,z_2 = i\int\limits_0^\infty e^{-t-xti}\,\frac{dt}{\sqrt{t}}.$

d)

β) 2. $y_k = \sin\omega_0 t\left\{J_0(\alpha) + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\alpha)\cos 2n\,\frac{\omega_0}{k}\,t\right\} +$

$$+ 2\cos\omega_0 t\cdot\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\alpha)\sin\frac{2n+1}{k}\,\omega_0 t.$$

6. §. FÜGGELÉK: A ZÉRUSHELYEK ELOSZLÁSA; A SAJÁTFÜGGVÉNYEK ORTOGONALITÁSA

a)

β) 2. Nem. Nincs.

b)

2. *a)* $[-1, 1]$; $p \equiv 1$. *b)* $[-1, 1]$; $p(x) = (1-x)^p\,(1+x)^q$.

FELHASZNÁLT ÉS AJÁNLOTT IRODALOM

1. K. W. Wagner: Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation; 2. verb. Aufl. — J. A. Barth, Leipzig.

2. Лаврентьев—Шабат: Методы теории функций комплексного переменного. — ГИТТЛ, Москва, 1951.

3. Б. В. Булгаков: Колебания. — ГИТТЛ, Москва, 1954.

4. M. I. Kontorovics Operátorszámítás és nem-stacionárius jelenségek elektrotechnikai alkalmazásai; fordítás oroszból. — Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.

5. Гарднер—Бэрнс: Переходные процессы в линейных системах; fordítás angolból. — ГИТТЛ, Москва, 1951.

6. Фукс—Левин: Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. — ГИТТЛ, Москва, 1951.

7. Диткин—Кузнецов: Справочник по операционному исчислению. — ГИТТЛ, Москва, 1951.

8. van der Pol—Bremmer: Operational calculus based on the two-sided Laplace-integral. — Cambridge, 1950.

9. Fazekas Ferenc: Komplex függvénytan. — Műsz. Mat. Gyak. B. IV.— Tankönyvkiadó, Budapest, 1956.

10. Fezekas Ferenc: Határozott integrál. (Második rész). — Műsz. Mat. Gyak. A. V.** — Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

11. Carslaw—Jaeger: Operational methods in applied mathematics. — University Press, Oxford, 1948.

12. R. V. Churchill: Modern operational mathematics in engineering. — New York, 1944.

13. N. W. McLachlan: Complex variable and operational calculus with technical applications. — Cambridge, 1939.

14. E. T. Whittaker, G. N. Watson: A course of modern analysis. — Cambridge University Press, 1952.

15. Hurwitz—Courant: Funktionentheorie. — Springer, 1933.

16. T. M. MacRobert: Functions of a complex variable. — Macmillan, London, 1950.

17. В. И. Смирнов: Курс высшей математики, том II, III/2. — ГИТТЛ, Москва, 1949.

18. E. L. Ince: Ordinary differential equations. — Dover Publications, 1927.

19. F. Oberhettinger. u. W. Magnus: Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik. — Springer, Berlin, 1949.

20. J. Lense: Reihentwicklungen in der mathematischen Physik. — W. der Gruyter, Berlin und Leipzig, 1933.

21. Fodor György: A Laplace-transzformáció műszaki alkalmazása. — Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962.

22. Farkas Miklós: Speciális függvények. — Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964.

23. Bajcsay—Fazekas: Közönséges differenciálegyenletek (II. rész). — Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.

Tankönyvkiadó Vállalat
A kiadásért felelős: Vágvölgyi Tibor igazgató
Újranyomásra előkészítette: Ambrus Ferenc
Műszaki vezető: Gonda Pál
Műszaki szerkesztő: Simányi Hugó
A kézirat nyomdába érkezett: 1965. június hó — Megjelent: 1965. október hó
Példányszám: 1000 — Terjedelem: 26 (A/5) ív
Készült az 1957. évi első kiadás matricájának felhasználásával, íves magasnyomással,
az MSZ 5601—59 és az MSZ 5602—55 szabvány szerint
Raktári szám: 44 331/I.
65.7778 Egyetemi Nyomda, Budapest